Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni Prova scritta

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

19 settembre 2005

I modulo

1. Calcolare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2^n)\,(n!+2^n)}{(n+2)!\,\alpha^n}$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(n^2+2^n)\,(n!+2^n)}{(n+2)!\,\alpha^n} &= \left(\frac{n^2+2^n}{\alpha^n}\right)\left(\frac{n!+2^n}{(n+2)!}\right)\\ &= \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n\left(\frac{n^2}{2^n}+1\right)\frac{n!}{(n+2)!}\left(1+\frac{2^n}{n!}\right).\end{aligned}$$

Notiamo ora che per $n\to\infty$

$$\left(\frac{n^2}{2^n}+1\right)\to 1 \qquad \left(1+\frac{2^n}{n!}\right)\to 1$$

mentre

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \to 0.$$

Se $\alpha > 2$ si ha $(2/\alpha)^n \to 0$ e quindi il limite cercato è 0. Se $\alpha = 2$ si ha $(2/\alpha)^n = 1$ e quindi il limite cercato è ancora 0. Se invece $\alpha < 2$ (e $\alpha > 0$ per ipotesi) si ha

$$\frac{(2/\alpha)^n}{(n+1)(n+1)} \to +\infty$$

in quanto nel rapporto di tipo "$\frac{\infty}{\infty}$" il termine esponenziale a numeratore è preponderante sul termine polinomiale a numeratore.

In conclusione il limite cercato vale 0 se $\alpha \geq 2$ e vale $+\infty$ se $\alpha \in (0,2)$.

2. Calcolare, se esistono, la derivata prima e la derivata seconda della seguente funzione

$$f(x) = \exp(-|x|^{\frac{3}{2}}).$$

Soluzione. Ricordiamo che la funzione $g(x) = |x|$ è derivabile due volte per $x \neq 0$ e si ha $g'(x) = \frac{x}{|x|}$, $g''(x) = 0$. Dunque anche $f(x)$ è derivabile due volte per $x \neq 0$ e si ha

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{2}}\exp(-|x|^{\frac{3}{2}}), \qquad f''(x) = \left[-\frac{3}{4}|x|^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{4}|x|\right]\exp(-|x|^{\frac{3}{2}}).$$

Inoltre notiamo che
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$
e dunque per il Teorema de L'Hôpital si ha che la derivata prima esiste anche per $x = 0$ e vale
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(h) = 0.$$
La derivata seconda, invece, non esiste in 0. Infatti si ha
$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} -\frac{3}{2}|h|^{-\frac{1}{2}} e^{-|h|^{\frac{3}{2}}} = \mp\infty.$$

II modulo

1. (a) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa con un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Dimostrare che f è costante.
   (b) Studiare la convessità della funzione
$$f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + x^2}.$$

Soluzione (a). Consideriamo due punti distinti $x_1 < x_2$ qualsiasi. La retta secante il grafico della funzione $f(x)$ nei punti presi in considerazione, ha equazione
$$r(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$
Essendo f una funzione convessa, sappiamo che $f(x) \geq r(x)$ quando x sta al di fuori dell'intervallo $[x_1, x_2]$. In particolare se fosse $f(x_2) > f(x_1)$ si ha $r(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi anche $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ contraddicendo l'ipotesi che ci sia un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Analogamente se fosse $f(x_2) < f(x_1)$ si avrebbe $r(x) \to +\infty$ e quindi $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$, contraddicendo l'esistenza di un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

In conclusione deve essere necessariamente $f(x_1) = f(x_2)$ ed essendo questo vero per ogni $x_1 < x_2$ si deduce che f è costante.

Soluzione (b). Per $x \neq 0$ si ha
$$f'(x) = 2x - \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2}}.$$
Derivando una seconda volta si ottiene
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 - \frac{(6x^2+1)\sqrt{x^4+x^2} - (2x^3+x)\frac{2x^3+x}{\sqrt{x^4+x^2}}}{x^4+x^2} \\ &= 2 - \frac{(6x^2+1)(x^4+x^2) - (2x^3+x)^2}{(x^4+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2 - \frac{2x^6+3x^4}{(x^4+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$
Cerchiamo di determinare per quali x vale la diseguaglianza
$$f''(x) > 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\iff \quad \frac{2x^6 + 3x^4}{(x^4 + x^2)^{\frac{3}{2}}} < 2 \\ &\iff \quad 2x^6 + 3x^4 < 2(x^4 + x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &\iff \quad (2x^6 + 3x^4)^2 < 4(x^4 + x^2)^3 \\ &\iff \quad 4x^{12} + 12x^{10} + 9x^8 < 4x^{12} + 12x^{10} + 12x^8 + 4x^6 \\ &\iff \quad 0 < 3x^8 + 4x^6 \end{aligned}$$

che risulta essere verificata per ogni $x \neq 0$.

Essendo f una funzione continua possiamo concludere che f è convessa sugli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$.

Notiamo però che f non è continua su tutta la retta reale in quanto si ha

$$\lim_{h \to 0^{\pm}} f'(h) = \mp\infty$$

che significa che la funzione ha una cuspide nel punto 0 e non è convessa in nessun intervallo centrato in 0.

2. Trovare una primitiva della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos^2 x}.$$

Soluzione. Notiamo che il numeratore è uguale alla derivata del denominatore. Si ha dunque

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos^2 x}\, dx = \log |\operatorname{sen} x - \cos^2 x|.$$