Analisi Matematica II modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

11 aprile 2005

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(1 + e^{2x}) - \operatorname{arctg}(e^x)$$

e disegnarne il grafico. Determinare, in particolare:

(a) eventuali asintoti orizzontali e obliqui;

(b) il numero di zeri;

(c) le coordinate dei punti di massimo e minimo;

(d) intervalli di convessità, punti di flesso;

(e) il numero di intersezioni del grafico della funzione con la retta tangente nei punti di flesso.

Soluzione. La funzione è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque per $x \to -\infty$ si ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ mentre per $x \to +\infty$ cerchiamo un eventuale asintoto obliquo. Si ha

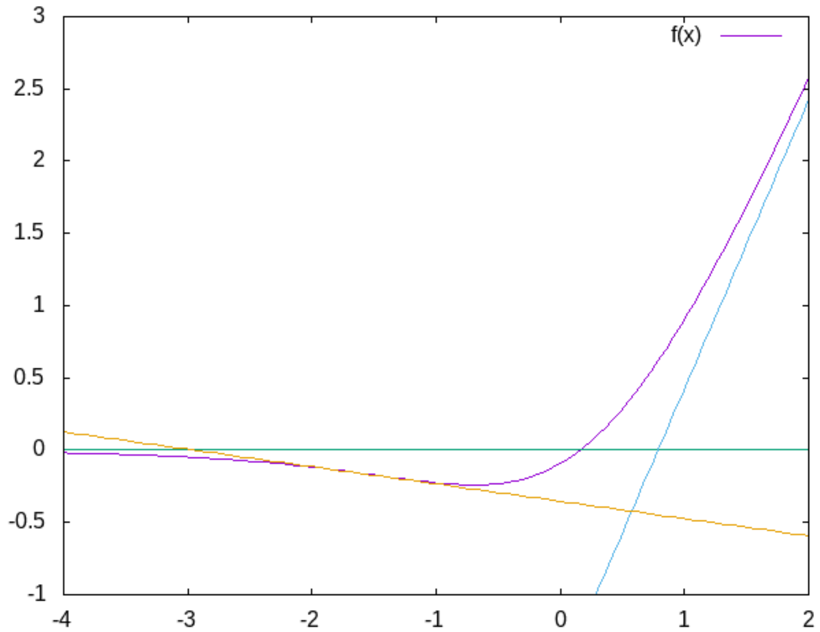
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\log(e^{2x}(e^{-2x}+1)) - \operatorname{arctg}(e^x)}{x} = \frac{2x + \log(e^{-2x}+1) - \operatorname{arctg}(e^x)}{x} \\ &= 2 + \frac{\log(e^{-2x}+1) - \operatorname{arctg}(e^x)}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 2\end{aligned}$$

mentre

$$f(x) - 2x = \log(e^{-2x}+1) - \operatorname{arctg}(e^x) \xrightarrow{x\to+\infty} -\frac{\pi}{2}$$

dunque la retta $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Postponiamo la ricerca degli zeri.



La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2e^{2x}-e^x}{1+e^{2x}}.$$

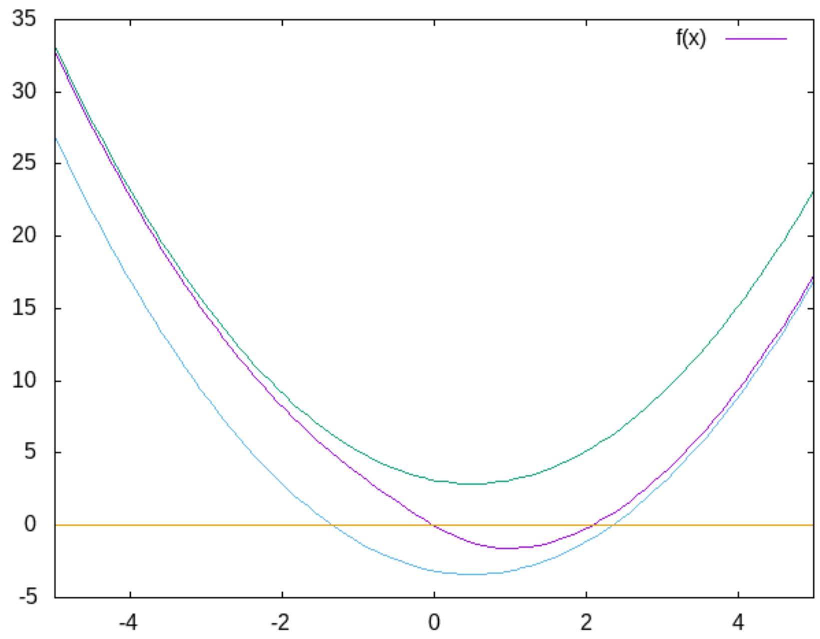
Il segno di $f'(x)$ è dunque uguale al segno di $2e^{2x} - e^x$ che ha lo stesso segno di $2e^x - 1$. Dunque f' si annulla per $x = -\log 2$, è positiva per valori maggiori e negativa per valori minori. La funzione dunque è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, -\log 2]$ e strettamente crescente su $[-\log 2, +\infty)$. In $-\log 2$ c'è un minimo assoluto per f di coordinate $(-\log 2, f(-\log 2)) = (-\log 2, \log 5 - \log 4 - \text{arctg}(1/2))$.

Riprendiamo lo studio degli zeri. Dato che per $x \to -\infty$ si ha $f(x) \to 0$ e che f è strettamente decrescente sull'intervallo $x \in (-\infty, -\log 2]$, su questo intervallo la funzione è sempre negativa. In particolare $f(-\log(2)) < 0$. Sull'intervallo $[-\log 2, +\infty)$ c'è invece uno zero x_0 (dato dal teorema degli zeri, visto che agli estremi dell'intervallo la funzione ha segni opposti) che è unico in quanto la funzione è strettamente crescente, e quindi iniettiva, su questo intervallo. Visto che $f(0) < 0$ possiamo anche affermare che $x_0 > 0$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(4e^{2x} - e^x)(1+e^{2x}) - (2e^{2x} - e^x)2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(e^{2x} + 4e^x - 1)}{(1+e^{2x})^2}.$$

Il segno di f'' è dato dal segno di $e^{2x} + e^x - 1$. Posto $t = e^x$ notiamo che si ha $t^2 + t - 1 = 0$ per $t = -2 \pm \sqrt{5}$. Visto che siamo interessati solo a



valori positivi di t, troviamo che f'' si annulla solo quando $e^x = \sqrt{5} - 2$ cioè per $x = \log(\sqrt{5} - 2)$, è positiva per valori maggiori e negativa per valori minori. Dunque la funzione $f(x)$ ha un flesso in $x_0 = \log(\sqrt{5} - 2)$, è strettamente concava su $(-\infty, x_0]$ e strettamente convessa su $[x_0, +\infty)$. Di conseguenza il grafico della funzione si trova (strettamente) al di sotto della retta tangente nel punto di flesso per $x < x_0$ e si trova al di sopra di tale retta per $x > x_0$. Dunque il grafico della funzione e la retta tangente nel punto di flesso si incontrano solamente nel punto di tangenza $(x_0, f(x_0))$.

2. Studiare la funzione
$$f(x) = x^2 - x - 2\operatorname{arctg} x$$
e disegnarne il grafico. Determinare, in particolare:

   (a) eventuali asintoti orizzontali e obliqui;

   (b) il numero di zeri;

   (c) le coordinate dei punti di massimo e minimo;

   (d) intervalli di convessità, punti di flesso.

Soluzione. La funzione è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. Per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \to +\infty$ e $f(x)/x \to \pm\infty$. Di conseguenza non ci sono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui. Si possono invece facilmente determinare gli asintoti parabolici $y = x^2 - x + \pi$ per $x \to -\infty$ e $y = x^2 - x - \pi$ per $x \to +\infty$. Notiamo subito che $f(0) = 0$ e postponiamo la ricerca di altri zeri.

Si ha

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 3}{1+x^2} = \frac{(2x^2+x+3)(x-1)}{1+x^2}.$$

Si verifica facilmente che il polinomio $2x^2 + x + 3$ assume valori sempre positivi (il discriminante è negativo), dunque la derivata prima si annulla in $x = 1$, è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$. In particolare si ha un minimo assoluto nel punto di coordinate $(1, -\pi/2)$.

Visto che la funzione è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 1]$, non assume altri zeri a parte $f(0) = 0$ su tale intervallo, inoltre deve essere $f(1) < f(0) = 0$. Dunque sull'intervallo $[1, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente e sicuramente cambia di segno essendo $f(1) < 0$ e $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Dunque nell'intervallo $[1, +\infty)$ la funzione si annulla in un solo punto. In totale la funzione ha due zeri.

Per quanto riguarda la derivata seconda si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6x^2 - 2x + 2)(1+x^2) - (2x^3 - x^2 + 2x - 3)(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 4x^2 + 4x + 2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Notiamo che $2x^4 + 4x^2 + 4x + 2 = 2x^4 + (2x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $f''(x)$ è positivo per ogni x e di conseguenza la funzione f è convessa su tutto $\mathbb{R}$ e non ci sono punti di flesso.