

# Analisi Matematica I modulo

## Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

17 gennaio 2005

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n \cos n}{4n + 1} \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right).$$

*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} \frac{n^3 + 2n \cos n}{4n + 1} \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right) &= \frac{n^3}{n} \frac{1 + 2 \frac{\cos n}{n^2}}{4 + \frac{1}{n}} \frac{1 - \cos^2 \frac{2}{n}}{1 + \cos \frac{2}{n}} \\ &= \frac{1 + 2 \frac{\cos n}{n^2}}{4 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \cos \frac{2}{n}} \cdot n^2 \sin^2 \frac{2}{n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Notiamo quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

in quanto si tratta del prodotto di una successione limitata per una successione infinitesima. Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \frac{\cos n}{n^2}}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{4}.$$

Il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \cos \frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$$

è immediato. E infine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left( \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \right)^2 = 4$$

ricordandosi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1$$

è un limite notevole.

Per concludere abbiamo visto che la successione scritta in (1) è il prodotto di tre successioni convergenti ai valori  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  e 4. Dunque il limite della successione data è il prodotto di questi tre limiti, ossia  $\frac{1}{2}$ .

2. Fissato il parametro reale  $\alpha > 1$  si consideri la funzione

$$\begin{aligned} f: (1, \alpha) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \log x - \log \log x. \end{aligned}$$

Determinare, quando esistono, il massimo e il minimo di  $f$  al variare del parametro  $\alpha > 1$ .

*Soluzione.* Notiamo innanzitutto che si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

da cui segue  $\sup f = +\infty$  e quindi  $f$  non ammette massimo qualunque sia  $\alpha > 1$ .

La funzione  $f$  è derivabile e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \log x} = \frac{\log x - 1}{x \log x}.$$

Distinguiamo due casi. Se  $\alpha \leq e$  si può notare che la derivata di  $f$  è sempre negativa sull'intervallo  $(1, \alpha)$  dominio di  $f$ . Dunque  $f$  è strettamente decrescente e quindi non ammette minimo sull'intervallo aperto  $(1, \alpha)$ . Infatti se fosse  $m = \min\{f(x) : x \in (1, \alpha)\}$  si dovrebbe avere  $m = f(\bar{x})$  per qualche  $\bar{x} \in (1, \alpha)$ , ma allora scelto  $y \in (\bar{x}, \alpha)$  si avrebbe  $m = f(\bar{x}) > f(y)$  che contraddice l'ipotesi che  $m$  sia il minimo di  $f$ . Nel caso  $\alpha \leq e$ , dunque, la funzione non ha nè massimo nè minimo.

Nel caso  $\alpha > e$  la funzione ammette minimo. In questo caso, infatti, la derivata risulta essere negativa nell'intervallo  $(1, e)$  e positiva nell'intervallo  $(e, \alpha)$ . Dunque la funzione è strettamente decrescente in  $(1, e]$  e strettamente crescente in  $[e, \alpha)$ . Questo significa, in particolare, che  $e$  è un punto di minimo assoluto per  $f$ . Dunque il minimo di  $f$  è  $f(e) = \log e - \log \log e = 1 - \log 1 = 1$ . In questo caso dunque  $f$  non ammette massimo mentre il minimo di  $f$  è 1.