Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

16 aprile 2004

1. Dire se la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
è continua e se è differenziabile in nel punto $(0,0)$.

   Soluzione. Essendo
$$|f(x,y)| \le \frac{x^2y^2 + |y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)y^2 + (x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = y^2 + \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$
per $(x,y) \to (0,0)$ la funzione risulta essere continua.

   Per studiare la differenziabilità calcoliamo le derivate direzionali lungo il vettore $v = (\alpha, \beta)$:
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h\alpha, h\beta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h\alpha)^2(h\beta)^2 - (h\beta)^3}{h(h^2\alpha^2 + h^2\beta^2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\alpha^2\beta^2 - \beta^3}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{-\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

   Siccome quest'ultima espressione non è lineare in α e β concludiamo che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

2. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\arctan(x+k^2) - \frac{\pi}{2}\right]$$
è definita, è derivabile e la derivata è continua su tutta la retta reale $\mathbb{R}$ (suggerimento: studiare la convergenza totale della serie delle derivate).

   Soluzione. Notiamo innanzitutto che
$$\arctan(x+k^2) - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{k^2} + o(1/k) \qquad k \to \infty$$
in quanto si ha
$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{\arctan(x+k^2) - \pi/2}{1/k^2} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan(x+1/t^2) - \pi/2}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{-2t^{-3}}{1+(x+1/t^2)^2}}{2t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-2}{t^4 + (xt^2+1)^2} = -2.\end{aligned}$$

Dunque, per il criterio degli infinitesimi, la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque la funzione $f(x)$ è ben definita.

Posto $g_k(x) = \arctan(x + k^2) - \pi/2$ studiamo ora la convergenza totale della serie delle derivate $\sum g_k'(x)$. La funzione $g_k'(x) = \frac{1}{1+(x+k^2)^2}$ è positiva, ha un unico punto di massimo per $x = -k^2$, è crescente per $x \leq -k^2$ e decrescente per $x \geq -k^2$. Essendo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_k'(x)| = g_k'(-k^2) = 1$$

non si ha dunque convergenza totale della serie su tutto $\mathbb{R}$.

Se però ci restringiamo ad un intervallo $I = [a, +\infty)$ per ogni k sufficientemente grande ($k^2 \geq a$) si ha

$$\sup_{x\in I} |g_k'(x)| = g_k'(a) = \frac{1}{1 + (a + k^2)^2}$$

ed essendo

$$\sum_k \frac{1}{1 + (a + k^2)^2} < +\infty$$

la serie $\sum g_k'(x)$ converge totalmente sull'intervallo I. Siccome la serie $\sum g_k$ converge puntualmente su I e la serie delle sue derivate $\sum g_k'$ converge uniformemente su I, per il teorema di scambio della serie con la derivata, si ha che su I la funzione $f = \sum g_k$ è derivabile con derivata $f' = \sum g_k'$. D'altra parte le funzioni g_k' sono funzioni continue su I e la loro serie converge uniformemente. Dunque f' è una funzione continua su I.

Siccome questo è vero per $I = [a, +\infty)$ per qualunque a, deduciamo che f è derivabile con derivata continua su tutto $\mathbb{R}$.

3. Sia $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su Ω e continua su $\overline{\Omega}$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto e limitato. Dimostrare che se f verifica le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \neq 0 \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

allora il massimo di f su $\overline{\Omega}$ è uguale al massimo di f su $\partial\Omega$.

Soluzione. Notiamo che le condizioni su f ci dicono che il determinante Hessiano di f è sempre negativo:

$$\begin{aligned} Hf(x,y) = \det D^2 f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \right)^2 \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \right)^2 < 0. \end{aligned}$$

Questo significa che ogni eventuale punto critico di f in Ω è un punto di sella e quindi non è né massimo né minimo.

Di conseguenza i punti di massimo e minimo di f su $\overline{\Omega}$ non stanno su Ω e quindi si trovano tutti su $\partial\Omega$.