Analisi Matematica IV modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

24 marzo 2004

1. Risolvere il prolema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2x)^2 + y - 2x \\ y(\log 2) = 2\log 2. \end{cases}$$

Soluzione. Posto $z = y - 2x$ si ha $y' = z' + 2$ e il problema diventa quindi

$$\begin{cases} z' = z^2 + z - 2 = (z-1)(z+2) \\ z(\log 2) = 0. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili, le due soluzioni costanti $z \equiv 1$ e $z \equiv -2$ non soddisfano il dato iniziale e possiamo dunque escluderle. Dividendo tutto per $(z-1)(z+2)$ si ottiene dunque

$$\frac{z'}{(z-1)(z+2)} = 1.$$

Ricordando che

$$\int \frac{1}{(z-1)(z+2)}\,dz = \frac{1}{3}\int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\,dz = \frac{1}{3}\log\left|\frac{z-1}{z+2}\right|$$

si trova

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{z-1}{z+2}\right| = x - c$$

da cui si ricava

$$\frac{z-1}{z+2} = \pm\exp(3x-3c) = \pm e^{-3c}e^3x$$

che posto $k = \pm e^{-3c}$, può essere più semplicemente scritta come

$$\frac{z-1}{z+2} = ke^{3x}.$$

Imponendo che valga la condizione $z(\log 2) = 0$ si trova $8k = -1/2$ ovvero $k = -1/16$. Risolvendo in z si ha poi

$$z - 1 = ke^{3x}z + 2ke^{3x}$$

ovvero

$$z = \frac{2ke^{3x}+1}{1-ke^{3x}} = \frac{16-2e^{3x}}{e^{3x}+16}$$

e infine

$$y = z + 2x = \frac{16-2e^{3x}}{e^{3x}+16} + 2x.$$

2. Determinare tutte le soluzioni di classe $\mathcal{C}^2$ dell'equazione differenziale

$$yy' + 2\sqrt{y'} = x(y')^2$$

e disegnarne i grafici.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che ogni soluzione deve soddisfare la relazione $y' \geq 0$ perché l'equazione sia definita. Notiamo poi che $y \equiv c$ è soluzione dell'equazione differenziale, in quanto ogni termine è moltiplicato per y'. Supponiamo quindi $y' > 0$ e dividiamo tutto per y' così da ottenere una equazione di Clairaut:

$$y = xy' - 2(y')^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Visto che siamo interessati solo alle soluzioni di classe $\mathcal{C}^2$ possiamo derivare l'equazione per ottenere la relazione

$$y' = y' + xy'' + y''(y')^{-\frac{3}{2}}$$

ossia

$$y''(x + (y')^{-\frac{3}{2}}) = 0.$$

L'equazione $y'' = 0$ ci dà come possibile soluzione una qualunque funzione lineare $y = mx + q$. Dovendo tali funzioni soddisfare l'equazione (1) si determina il fascio di rette:

$$y = mx - 2m^{-\frac{1}{2}} \qquad m > 0.$$

Per quanto riguarda l'equazione $x + (y')^{-\frac{3}{2}} = 0$ notiamo innanzitutto che essendo $y' > 0$ deve essere anche $x < 0$; e poi risolviamo in y'

$$y' = (-x)^{-\frac{2}{3}}$$

e sostituiamo in (1) per ottenere la soluzione singolare:

$$\begin{aligned} y &= x(-x)^{-\frac{2}{3}} - 2(-x)^{\frac{1}{3}} = -(-x)^{\frac{3}{3}}(-x)^{-\frac{2}{3}} - 2(-x)^{\frac{1}{3}} \\ &= -3(-x)^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x} \qquad x < 0. \end{aligned}$$

L'insieme di tutte le soluzioni trovate è rappresentato in figura.

3. Studiare qualitativamente le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - x^4) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

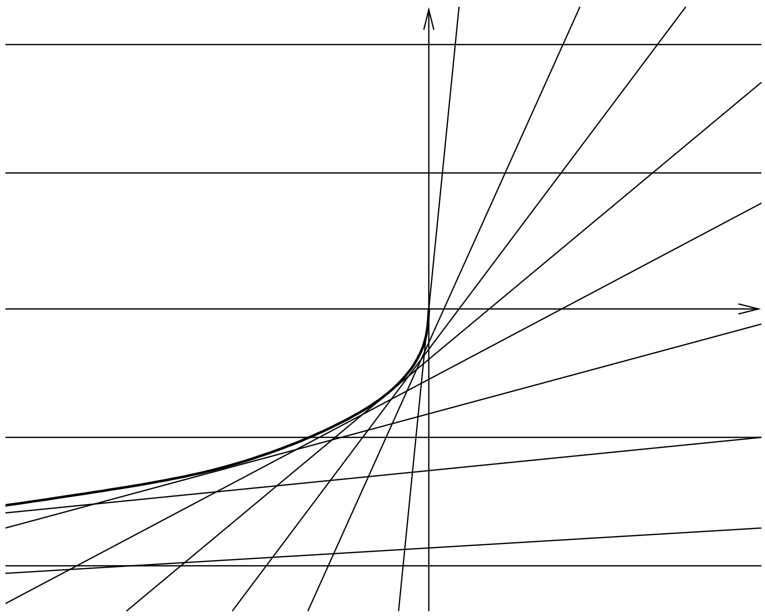
al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. In particolare

(a) dimostrare che ogni soluzione ha esistenza globale;

(b) calcolare il limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x}$;

(c) (facoltativo) dimostrare che la soluzione corrispondente a $y_0 = 0$ è monotòna.

Soluzione. Dallo studio del segno di y' si trova che $y' > 0$ sopra la parabola $y = x^2$ e sotto la parabola $y = -x^2$, $y' = 0$ sulle due parabole e $y' < 0$ fuori dalle due parabole. Notiamo anche che $|y'| < \pi/2$ essendo la funzione arctan limitata tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Siccome una funzione con un asintoto verticale non può avere la derivata limitata deduciamo che ogni soluzione y ha esistenza



globale (ricordiamo anche che l'equazione differenziale verifica il teorema di esistenza e unicità locale su tutto $\mathbb{R}^2$).

Sempre dalla stima $|y'| < \pi/2$ si trova anche (integrando o applicando il Teorema di Lagrange)

$$|y - y_0| < \frac{\pi}{2}|x|.$$

Dunque

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y^2}{x^3} = 0$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to\pm\infty} y^2 - x^4 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(y^2/x^3 - x) = -\infty$$

da cui

$$\lim_{x\to\pm\infty} y'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan(y^2 - x^4) = -\frac{\pi}{2}$$

e per il Teorema de L'Hôpital concludiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} y'(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Nel caso in cui $y_0 = 0$ abbiamo già visto che vale la relazione $|y| < \frac{\pi}{2}|x|$. Dunque, se $|x| \leq 1$ si ha

$$|y'| = \arctan(|y^2 - x^4|) \leq |y^2 - x^4| \leq y^2 + x^4 \leq \frac{\pi^2}{4}x^2 + x^4 \leq 4x^2 + x^4 \leq 5x^2$$

da cui per confronto si ottiene

$$|y| \leq \frac{5}{3}|x|^3$$

e per $|x| < 3/5$ si conclude

$$|y| \leq |x|^2.$$

D'altra parte se $|x| > 3/5$ la soluzione non può comunque attraversare le due parabole, in quanto nel punto di attraversamento la sua derivata dovrebbe essere strettemente negativa mentre in tali punti la derivata della soluzione è nulla.

Questo ci permette di dire che la soluzione con dato iniziale $y_0 = 0$ rimane compresa tra le due parabole $y = \pm x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ Di conseguenza questa soluzione ha derivata negativa per ogni $x \neq 0$ e quindi è strettamente decrescente.

Modifiche

30.3.2004: Corretto qualche errore di (ehm) sintassi.