Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

18 novembre 2003

1. (a) Data la successione di funzioni

$$f_k(x) = xe^{-kx^3},$$

stabilire se la successione converge uniformemente sull'insieme in cui c'è convergenza puntuale.

(b) Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} xe^{-kx^3},$$

stabilire se la serie converge totalmente sull'insieme in cui c'è convergenza puntuale (della serie stessa).

Soluzione. Essendo

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

si ha che $f_k(x)$ converge puntualmente a 0 sulla semiretta $[0, +\infty)$.

Essendo poi

$$f_k'(x) = (1 - 3kx^3)e^{-kx^3}$$

ed essendo $f_k(0) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f_k(x)$ si trova facilmente che f_k è positiva sull'intervallo $[0, +\infty)$ ed ha un massimo assoluto nel punto $x_k = 1/\sqrt[3]{3k}$. In conclusione

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_k(x)| = f_k(x_k) = \frac{1}{\sqrt[3]{3k}} e^{-\frac{1}{3}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

e quindi la successione converge uniformemente sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Per quanto riguarda la serie di funzioni si ha

$$\sum_k xe^{-kx^3} = \begin{cases} x \sum_k \left(e^{-x^3}\right)^k & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e dunque la serie converge puntualmente quando $e^{-x^3} < 1$ oppure quando $x = 0$ ovvero sull'intervallo $[0, +\infty)$. Su tale intervallo non si ha però convergenza totale in quanto

$$\sum_k \sup_{x \in (0,+\infty)} |f_k(x)| = \sum_k f_k(x_k) = e^{-\frac{1}{3}} \sum_k \frac{1}{\sqrt[3]{3k}} = +\infty.$$

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{\sqrt{|x|} + |y|}.$$

Soluzione. In base alle seguenti note disuguaglianze

$$\sqrt{|x|} \geq |x| \qquad \text{se } |x| \leq 1$$

$$|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \qquad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

si ha, per $|x| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{\sqrt{|x|} + |y|} &\leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}{|x| + |y|} \\ &\leq \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Dunque se $\alpha > 1$ il limite esiste e vale 0.

Se $\alpha < 1$ sulla retta $x = 0$ si ha

$$f(0, y) = \frac{|y|^\alpha}{|y|} = |y|^{\alpha-1} \xrightarrow{y\to 0} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e quindi il limite non può essere finito se $\alpha < 1$. Per $\alpha = 1$ il limite potrebbe essere 1. Ma questo lo escludiamo facilmente notando che sulla retta $y = 0$ si ha invece (per $\alpha = 1$)

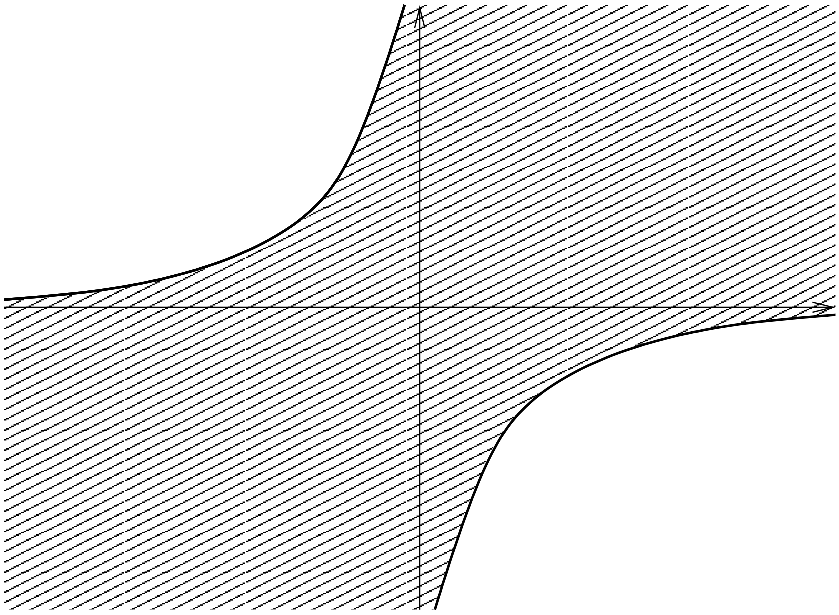
$$f(x, 0) = \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|} \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Dunque il limite esiste finito se e solo se $\alpha > 1$.

3. Si consideri la funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \log(1 + xy)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in D \setminus (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sull'insieme $D = \{(x, y)\colon xy > -1\}$.



(a) Disegnare il dominio D.

(b) Dato un qualunque vettore unitario (una direzione) $\lambda = (\alpha, \beta)$ calcolare
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0).$$

(c) Dire se f è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Il dominio D ha la forma riportata in figura.

Dato $\lambda = (\alpha, \beta)$ si ha[1]
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h\alpha, h\beta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\alpha \log(1 + h\alpha h\beta)}{h(h^2\alpha^2 + h^2\beta^2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h^2\alpha\beta)}{h^2\alpha\beta} \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha^2\beta\end{aligned}$$

(essendo v unitario si ha infatti $\alpha^2 + \beta^2 = 1$).

Inoltre f non può essere differenziabile in $(0,0)$ in quanto se lo fosse si avrebbe, per ogni α, β
$$\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \alpha f_x(0,0) + \beta f_y(0,0)$$
il che è impossibile quali che siano i valori di $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Modifiche:

18.11.2003: prima versione;

21.11.2003: ho semplificato la soluzione del secondo esercizio.

[1] nella seguente catena di uguaglianze si suppone $\alpha\beta \neq 0$. Ma se $\alpha\beta = 0$ il risultato finale è comunque banalmente verificato.