Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni prova scritta n. 3/I-II, n. 5/I e n. 3/II

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

23 settembre 2003

1. Mostrare che per ogni $x > 0$ si ha
$$e^x > x(1 + \log x) + 1.$$
Soluzione. Si tratta di studiare il segno della funzione
$$f(x) = e^x - x(1 + \log x) - 1$$
sul suo dominio $\{x > 0\}$. Innanzitutto consideriamo la derivata prima
$$f'(x) = e^x - \log x - 2 = (e^x - x - 1) + (x - 1 - \log x) = h(x) + g(x).$$
Il primo addendo $h(x)$ è positivo, essendo $h'(x) = e^x - 1 > 0$ per ogni $x > 0$. Il secondo addendo $g(x)$ è pure ≥ 0, infatti essendo $g'(x) = 1 - 1/x$ la funzione g ha minimo assoluto (per $x > 0$) nel punto $x = 1$ e $g(1) = 0$. Dunque $f'(x)$ è positivo e in conclusione f è strettamente crescente. Essendo infine
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$
abbiamo, come voluto, $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \sin\frac{1}{n} - n^2.$$
Soluzione. Per il teorema di legame tra limiti di successioni e limiti di funzioni sappiamo che il limite in questione ha lo stesso valore del limite (ottenuto ponendo $x = 1/n$)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\sin x - \frac{1}{x^2}$$
se quest'ultimo limite esiste. Per calcolare questo limite possiamo quindi applicare il teorema de l'Hôpital ottenendo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\sin x - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$
Dunque il limite in questione converge al valore $-1/6$.

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \log(4-x^2)\,dx.$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\int \log(4-x^2)\,dx &= \int \log[(2-x)(2+x)]\,dx = \int \log(2-x)+\log(2+x)\,dx \\ &= \int \log(2-x)\,dx + \int \log(2+x)\,dx\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(2-x)\,dx + \int_0^1 \log(2+x) &= -\int_2^1 \log y\,dy + \int_2^3 \log y\,dy \\ &= \int_1^3 \log y\,dy = [y\log y - y]_1^3 \\ &= 3\log 3 - 3 - \log 1 + 1 = 3\log 3 - 2.\end{aligned}$$

4. Si consideri la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

(a) Provare che la serie converge;

(b) trovare la somma della serie.

Soluzione.

(a) Notiamo che si ha

$$a_k = \log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log\left(1+\frac{1}{k^2+2k}\right) = \log(1+1/k^2+o(1/k^2) = 1/k^2+o(1/k^2).$$

Dunque

$$\lim_{k\to\infty} k^2 a_k = 1$$

e la serie converge per il criterio degli infinitesimi.

(b) Notiamo che si ha

$$a_k = \log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log\frac{k+1}{k} - \log\frac{k+2}{k+1} = b_k - b_{k+1}$$

dove

$$b_k = \log\frac{k+1}{k}.$$

Dunque la serie è telescopica, in particolare si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} = \log 2 - \log\frac{n+2}{n+1}$$

ed quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \log 2 - \log\frac{n+2}{n+1} = \log 2.$$