

Analisi Matematica I e II modulo

Soluzioni prova scritta n. 2/I-II, n. 4/I

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

8 luglio 2003

1. Determinare (se esistono) i valori massimo e minimo assoluti assunti dalla funzione

$$f(x) = e^{-\frac{2x^2}{\pi}} \sin x.$$

Soluzione. Notiamo che la funzione tende a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi avrà dei punti di massimo e minimo assoluti su \mathbb{R} e in tali punti necessariamente la derivata prima dovrà annullarsi. Calcoliamo quindi

$$f'(x) = \left(\cos x - \frac{4x}{\pi} \sin x\right) e^{-\frac{2x^2}{\pi}}$$

e l'equazione $f'(x) = 0$ diventa

$$\cos x = \frac{4x}{\pi} \sin x$$

ovvero

$$\tan x = \frac{\pi}{4x}.$$

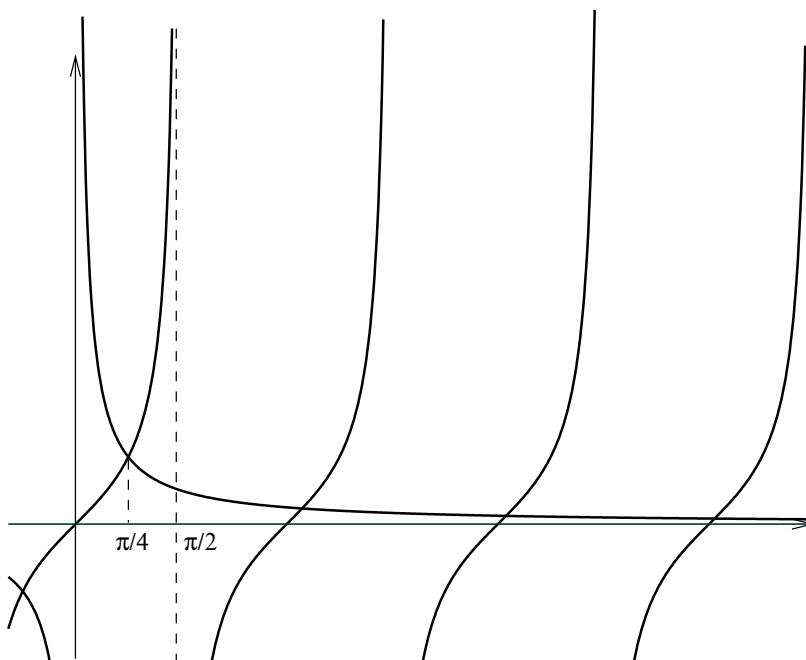
Ricordando l'andamento dei grafici della funzione tangente e dell'iperbole a secondo membro ci si rende conto che quest'ultima equazione ha infinite soluzioni che corrispondono quindi ad infiniti punti critici per la funzione $f(x)$ (si veda la figura). La prima soluzione positiva di questa equazione sarà compresa tra 0 e $\pi/2$ e fortunatamente, per verifica diretta, si trova che tale soluzione è $\bar{x} = \pi/4$. Il successivo punto critico sarà compreso tra π e $3\pi/2$.

La derivata prima in 0 della funzione è pari a $f'(0) = 1$ e quindi la derivata prima è positiva per $x \in [0, \bar{x}[$. Dunque in \bar{x} c'è un punto di massimo relativo di f e si ha

$$f(\bar{x}) = e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vogliamo dimostrare che questo è un massimo assoluto. I successivi punti critici di f si hanno per $x > \pi$. Dunque essendo $|f(x)| \leq e^{-\frac{2x^2}{\pi}}$ nei successivi punti critici si avrà $x > \pi \Rightarrow |f(x)| < e^{-2\pi}$ mentre si vede facilmente che $|f(\bar{x})| = e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2} > e^{-2\pi}$.

Abbiamo quindi mostrato che per $x > 0$ la funzione $f(x)$ ha massimo assoluto in \bar{x} e che questo valore è massimo anche per la funzione $|f(x)|$. Essendo $f(x)$ una funzione dispari possiamo quindi concludere che \bar{x} è il massimo assoluto di f e $-\bar{x}$ è il minimo assoluto. I rispettivi valori massimo e minimo sono dunque $\pm e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.



2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - 2} \right)^{(n^3 - n^4 \tan \frac{1}{n})}.$$

Soluzione. Siamo di fronte alla forma indeterminata 1^∞ , vogliamo ricondurci al limite notevole $(1 + 1/a_n)^{a_n} \rightarrow e$ per $a_n \rightarrow +\infty$.

Dunque riscriviamo la successione nel seguente modo:

$$\left(\frac{n^2 + n}{n^2 - 2} \right)^{(n^3 - n^4 \tan \frac{1}{n})} = \left[\left(1 + \frac{n+2}{n^2-2} \right)^{\frac{n^2-2}{n+2}} \right]^{\frac{n+2}{n^2-2} (n^3 - n^4 \tan \frac{1}{n})}.$$

Notiamo che $\frac{n^2-2}{n+2} \rightarrow +\infty$ dunque l'espressione tra parentesi quadre tende ad e . Per quanto riguarda l'esponente si ha

$$\frac{n+2}{n^2-2} (n^3 - n^4 \tan \frac{1}{n}) = \frac{n(n+2)}{n^2-2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}.$$

Il primo fattore di questo prodotto tende chiaramente a 1. Per quanto riguarda il secondo fattore passiamo dal limite di successione ad un limite di funzione ponendo $x = 1/n$. Possiamo quindi applicare il teorema de l'Hopitâl per ottenere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^2 = -\frac{1}{3}.$$

In definitiva otteniamo quindi che il limite cercato è $e^{-\frac{1}{3}}$.

3. Calcolare

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

Soluzione. Si ha

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 y dy.$$

Notiamo che $\int_0^{2\pi} \sin^2 y dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 y dy$ in quanto le funzioni \sin e \cos sono l'una la traslata dell'altra e in quanto l'integrale viene fatto su un periodo. Inoltre la somma di questi integrali è 2π in quanto $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. Dunque $\int_0^{2\pi} \sin^2 y dy = \pi$ e l'integrale cercato vale $\frac{\pi}{8}$.

Come alternativa si poteva calcolare l'integrale di $\sin^2 y$ sfruttando l'identità $\sin^2 y = \frac{1 - \cos(2y)}{2}$.

4. (a) Determinare per quali valori del parametro reale x risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^{nx}}.$$

- (b) *Facoltativo:* studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{n^3}.$$

Soluzione.

- (a) Vogliamo utilizzare il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}e^{nx}}} = e^{-x} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}}.$$

Il secondo fattore del prodotto tende ad 1, mentre il primo fattore tende a 0 se $x > 0$, tende a 1 se $x = 0$ e tende ad infinito se $x < 0$. Dunque possiamo concludere che per $x > 0$ la serie converge e per $x < 0$ la serie diverge. Se $x = 0$ la serie si riduce a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ che sappiamo divergere.

- (b) Essendo $n! \leq n^n$ si ha

$$\frac{\log n!}{n^3} \leq \frac{\log n^n}{n^3} = \frac{\log n}{n^2}.$$

Utilizzando il criterio degli infinitesimi si vede che questa serie ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ e quindi converge.