Analisi Matematica II modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

20 maggio 2003

1. Calcolare
$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^4 \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

   Soluzione. Integrando per parti si ha
$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\sqrt{x-1}\log x - 2\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$$
   tramite la sostituzione $x-1=t^2$, $dx = 2t\,dt$ si ottiene poi
$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$= 2t - 2\arctan t = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1}).$$
   Dunque
$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^4 \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{a\to 1^+} \left[2\sqrt{x-1}(\log x - 2) + 4\arctan\sqrt{x-1}\right]_a^4$$
$$= -4\sqrt{3}(1-\log 2) + \frac{4}{3}\pi.$$

2. Calcolare
$$\lim_{M\to +\infty} \int_1^M \frac{\arctan\sqrt{x}}{x^2}\,dx.$$

   Soluzione. Utilizzando la sostituzione $x=t^2$, $dx = 2t\,dt$ e poi integrando per parti si ottiene
$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{x^2} = \int 2\frac{\arctan t}{t^3}\,dt = -\frac{\arctan t}{t^2} + \int \frac{1}{t^2(1+t^2)}\,dt$$
$$= -\frac{\arctan t}{t^2} + \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{\arctan t}{t^2} - \frac{1}{t} - \arctan t$$
$$= -\left(1+\frac{1}{x}\right)\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
   Dunque
$$\lim_{M\to +\infty} \int_1^M \frac{\arctan\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \lim_{M\to +\infty} \left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^M$$
$$= -\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{4} + 1 = 1.$$

3. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{x^3}.$$

Soluzione. Sapendo che per $x \to 0$ si ha
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + o(x),$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + o(x)$$
otteniamo
$$\sin\tan x = (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - \frac{(x+o(x))^3}{6} + o((x+o(x))^3)$$
$$= x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
e
$$\tan\sin x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + \frac{(x+o(x))^3}{3} + o(x^3)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
dunque
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$$

4. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\tan x - \sin\sin x}{x^3}.$$

Soluzione. Ricordando gli sviluppi di Taylor di $\tan x$ e $\sin x$ (si veda l'esercizio precedente) si ha
$$\tan\tan x = (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + \frac{(x+o(x))^3}{3} + o(x^3)$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\sin\sin x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - \frac{(x+o(x))^3}{6} + o(x^3)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
da cui
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3} = 1.$$

5. Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2.$$

Soluzione. Notiamo che si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}{\frac{\log n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \exp(-\frac{\log n}{n})}{\frac{\log n}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$$

(ovvero $1 - 1/\sqrt[n]{n} = O(\frac{\log n}{n})$). Dunque se a_n è il termine generico della serie si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} a_n = 0$$

essendo

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2 = 0.$$

Per il criterio degli infinitesimi, dato che la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge allora anche la serie $\sum a_n$ converge.

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

Soluzione. Analogamente a quanto visto nell'esercizio precedente si verifica facilmente che, se a_n è il termine generico della serie in questione si ha

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = +\infty$$

essendo

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{\log n}{n} = +\infty.$$

Per il criterio degli infinitesimi, dato che la serie $\sum 1/n$ diverge anche la serie data diverge.