

# Analisi Matematica II modulo

## Soluzioni della prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

20 marzo 2003

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = (x^2 - 4x + 2)e^x - \frac{x}{2}.$$

*Soluzione.* Il dominio di  $f$  è  $\mathbb{R}$ . Per quanto riguarda il comportamento agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \frac{x}{2} = 0$$

dunque c'è un asintoto obliquo di equazione  $y = -x/2$  per  $x \rightarrow -\infty$ . La funzione attraversa l'asintoto per i valori  $x = 2 \pm \sqrt{2}$  e rimane al di sopra dell'asintoto quando  $x$  assume valori esterni a questi.

Studiamo le derivate prima e seconda. Si ha

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x - \frac{1}{2}, \quad f''(x) = (x^2 - 4)e^x.$$

Dunque i punti  $x = \pm 2$  sono punti di flesso, la funzione è convessa nell'intervallo  $[-2, 2]$  e concava al di fuori di questo intervallo.

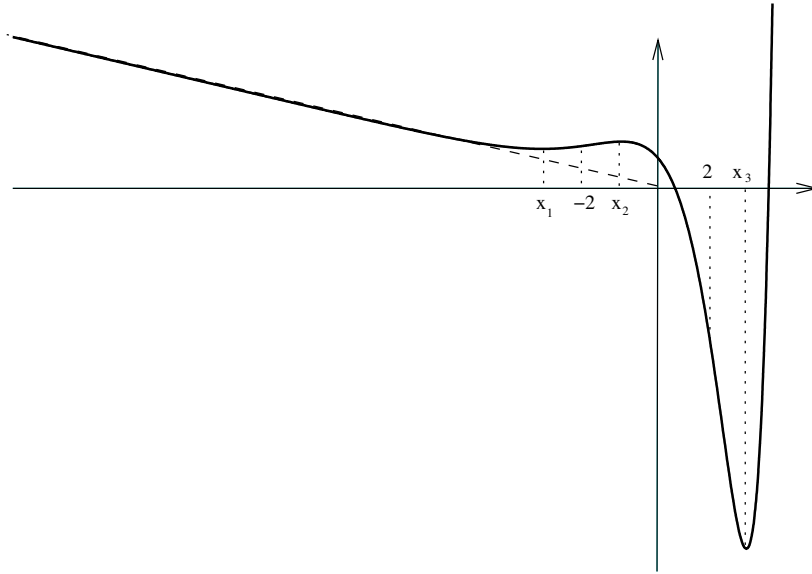
La funzione  $f'$  assumerà invece un minimo locale per  $x = -2$  e un minimo locale per  $x = 2$ . Si ha inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\frac{1}{2}, \quad f'(-2) = 6e^{-2} - \frac{1}{2} > \frac{6}{9} - \frac{1}{2} > 0,$$

$$f'(0) = -\frac{5}{2} < 0, \quad f'(2) = -2e^2 - \frac{1}{2} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Dunque la derivata prima  $f'(x)$  si annulla in esattamente tre punti  $x_1, x_2, x_3$  ordinati in questo modo

$$x_1 < -2 < x_2 < 0 < 2 < x_3.$$



La funzione  $f(x)$  assume quindi un minimo locale per  $x = x_1$ , un massimo locale per  $x = x_2$  e un minimo locale per  $x = x_3$ . Inoltre essendo  $f(x) > -x/2$  per  $x < 2 - \sqrt{2}$  si ha  $f(x_1) > 0$  e  $f(x_2) > 0$ . Si ha poi  $f(0) = -2$  e quindi  $f(x_3) < 0$ .

Complessivamente il grafico di  $f$  è quello rappresentato in figura

2. Dire se la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x^2)$  è Lipschitziana e se è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ .

*Soluzione.* Posto  $x_k = \sqrt{\pi/2 + 2k\pi}$   $y_k = \sqrt{3\pi/2 + 2k\pi}$  si verifica facilmente che  $|x_k - y_k| \rightarrow 0$  ma  $|f(x_k) - f(y_k)| = 2$ . Dunque  $f$  non è uniformemente continua e di conseguenza non è Lipschitziana.

3. Calcolare mediante la definizione (metodo di esaustione) l'integrale

$$\int_0^1 (4 - x) dx.$$

*Soluzione.* Per  $k = 0, \dots, N$  definiamo  $x_k = k/N$ . Questi punti dividono l'intervallo  $[0, 1]$  in  $N$  intervallini  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$  di ampiezza  $x_{k+1} - x_k = 1/N$ . Relativamente a questa partizione dell'intervallo  $[0, 1]$  possiamo facilmente calcolare le somme superiori  $S_N$  e inferiori  $s_N$  notando che (essendo  $f(x) = 4 - x$  decrescente) si ha  $\inf_{I_k} f(x) = f(x_{k+1})$  e  $\sup_{I_k} f(x) = f(x_k)$ . Infatti (ricordiamo che la somma di una progressione aritmetica è data dalla media tra il primo e l'ultimo termine moltiplicata per il numero di termini)

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (4 - x_k) = \frac{1}{N} \frac{4 - x_0 + 4 - x_{N-1}}{2} N$$

$$= \frac{4 - 0 + 4 - (N - 1)/N}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{N}$$

e

$$s_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(x_{k+1}) = \dots = \frac{4 - 1/N + 4 - N/N}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{N}.$$

Dunque si ha  $S_N \rightarrow 7/2$  e  $s_N \rightarrow 7/2$ . Questo significa che la funzione è integrabile e l'integrale cercato è pari a  $7/2$ .

4. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \log(e^x - x).$$

*Soluzione.* Posto  $g(x) = e^x - x$  si ha  $g'(x) = e^x - 1$ . Dunque  $g$  ha minimo assoluto nel punto  $x = 0$  e di conseguenza  $g(x) \geq g(0) = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Dunque l'argomento  $g$  del logaritmo è sempre positivo (anzi maggiore o uguale ad 1) e quindi il dominio della funzione è tutto  $\mathbb{R}$  (e la funzione è non negativa).

Studiamo il comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Possiamo essere però più precisi notando che (si sfruttino le identità  $f(x) = \log(-x) + \log(1 - e^x/x)$  e  $f(x) = x + \log(1 - x/e^x)$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \log(-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$$

cioè la funzione ha un asintoto obliquo di equazione  $y = x$  per  $x \rightarrow +\infty$  e tende "asintoticamente" alla funzione  $y = \log(-x)$  per  $x \rightarrow -\infty$ . È poi interessante notare che  $f(x) > \log(-x)$  per ogni  $x < 0$  e  $f(x) < x$  per ogni  $x > 0$ .

Studiamo le derivate della funzione. Si ha

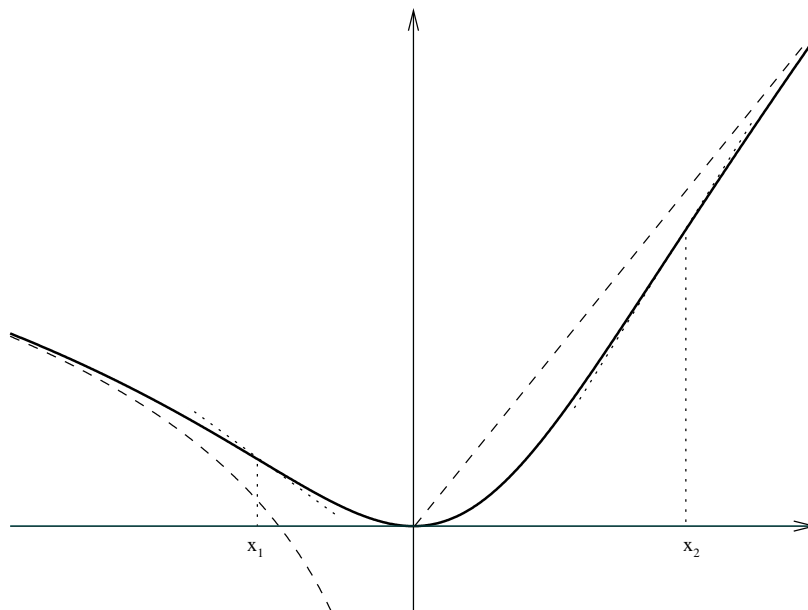
$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \quad f''(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Dunque la funzione  $f$  ha un minimo assoluto in  $x = 0$  ( $f(0) = 0$ ) ed è crescente (risp. decrescente) per  $x \geq 0$  (risp.  $x \leq 0$ ).

Studiamo anche la derivata seconda. Posto  $h(x) = (2 - x)e^x - 1$  si ha  $h'(x) = (1 - x)e^x$ . Dunque  $h$  ha massimo assoluto per  $x = 1$  ed è crescente su  $\{x \leq 1\}$  e decrescente su  $\{x \geq 1\}$ . Essendo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$ ,  $h(0) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$  la funzione  $h$  si annulla in esattamente due punti  $x_1$  e  $x_2$  con  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 1$ .

I punti  $x_1$  e  $x_2$  sono dunque gli unici punti di flesso per  $f$ .

Il grafico di  $f$  si potrà dunque rappresentare come segue.



5. Dire se la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$  è Lipschitziana e se è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ .

*Soluzione.* Se la funzione fosse Lipschitziana si avrebbe

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq L$$

e quindi il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

se esiste dovrebbe essere finito. D'altra parte questo limite si può calcolare facilmente e risulta invece essere pari a  $+\infty$ . Dunque la funzione non può essere lipschitziana.

Mostriamo che la funzione è invece uniformemente continua. Consideriamo la funzione  $g(x) = \sin(x)$ . Essendo  $|g'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$  si ha che  $g$  è lipschitziana di costante di lipschitz pari a 1. Cioè

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad |\sin(x) - \sin(x')| \leq |x - x'|.$$

Posto poi  $h(y) = \sqrt[3]{y}$  sappiamo, per il teorema di Cantor, che  $h$  è uniformemente continua nell'intervallo  $y \in [-1, 1]$  cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |y - y'| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y'}| < \varepsilon.$$

Mettendo insieme le affermazioni fatte si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x'| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x'}| < \varepsilon$$

che è proprio la definizione di uniforme continuità per la funzione  $f$ .  
 In alternativa si può dimostrare (per verifica diretta) che vale

$$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y'} \leq \sqrt[3]{|y - y'|}$$

e che vale

$$|\sin(x) - \sin(x')| \leq |x - x'|.$$

Dunque si ottiene

$$|f(x) - f(x')| \leq \sqrt[3]{|x - x'|}.$$

Essendo  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{t} = 0$  se ne deduce che  $f$  è uniformemente continua.

6. Calcolare mediante la definizione (metodo di esaustione) l'integrale

$$\int_0^2 (1 - x) dx.$$

*Soluzione.* Dividiamo l'intervallo  $[0, 2]$  in  $N$  parti mediante i punti  $x_k = 2k/N$ ,  $k = 0, \dots, N$ . Ogni intervallino  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$  ha ampiezza  $x_{k+1} - x_k = 2/N$ . Notiamo che (essendo  $f$  decrescente) si ha  $\sup_{I_k} f(x) = f(x_k)$  e  $\inf_{I_k} f(x) = f(x_{k+1})$ . Dunque per le somme superiori  $S_N$  e inferiori  $s_N$  su questa partizione si ottiene

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{N} f(x_k) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{2k}{N}\right) = \frac{2}{N} \frac{1 - 0/N + 1 - 2(N-1)/N}{2} N = \frac{2}{N}$$

e

$$s_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{N} f(x_{k+1}) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{2(k+1)}{N}\right) = \frac{2}{N} \frac{1 - 2/N + 1 - 2N/N}{2} N = -\frac{2}{N}.$$

Essendo  $S_N \rightarrow 0$  e  $s_N \rightarrow 0$  ne deduciamo che la funzione è integrabile e l'integrale in questione è pari a 0.