Analisi Matematica I modulo
Soluzioni della prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

29 gennaio 2003

1. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |2 - 3e^{-x^2}|.$$

   (a) Determinare massimi e minimi relativi e assoluti di f;

   (b) determinare l'insieme $f(\mathbb{R}) = \{f(x): x \in \mathbb{R}\}$;

   (c) determinare gli intervalli di convessità di f;

   (d) trovare l'equazione di tutte le rette che non intersecano il grafico di g.

   Soluzione.

   (a) Posto $g(x) = 2 - 3e^{-x^2}$ si ha $f(x) = |g(x)|$. Si trova facilmente che $g(x) < 0$ per $-x_0 < x < x_0$ dove $x_0 = \sqrt{\log \frac{3}{2}}$ e $g(x) = 0$ per $x = \pm x_0$. Dunque si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3e^{-x^2} & \text{per } |x| \geq x_0 \\ 3e^{-x^2} - 2 & \text{per } |x| < x_0. \end{cases}$$

   Inoltre f è derivabile per $x \neq \pm x_0$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 6xe^{-x^2} & \text{per } |x| > x_0 \\ -6xe^{-x^2} & \text{per } |x| < x_0. \end{cases}$$

   Gli intervalli di monotonia per f sono dunque $I_1 =]-\infty, -x_0]$, $I_2 = [-x_0, 0]$, $I_3 = [0, x_0]$ e $I_4 = [x_0, +\infty[$. Su I_1 e I_3 la funzione è strettamente decrescente e su I_2 e I_4 è strettamente crescente. In $-x_0$ e x_0 troviamo quindi due punti di minimo relativo per f mentre 0 è un punto di massimo relativo e non ci possono essere altri punti estremali. Essendo $f(\pm x_0) = 0$ ed essendo $f(x) > 0$ per $x \neq \pm x_0$ abbiamo che $\pm x_0$ sono due punti di minimo assoluto. Invece notiamo che $\sup f(I_1) = \sup f(I_4) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ mentre $f(0) = 1$. Dunque 0 non è un massimo assoluto, e non ci sono affatto punti di massimo assoluto.

   (b) Essendo f una funzione continua, per il teorema dei valori intermedi l'insieme $f(\mathbb{R})$ è un intervallo. Per quanto visto al punto precedente si ha $f(\mathbb{R}) = [0, 2[$.

   (c) La funzione f ammette derivata seconda per $x \neq \pm x_0$ e vale

$$f''(x) = \begin{cases} 6(1 - 2x^2)e^{-x^2} & \text{per } |x| > x_0 \\ 6(2x^2 - 1)e^{-x^2} & \text{per } |x| < x_0. \end{cases}$$

La derivata seconda si annulla dunque nei punti $\pm x_1$ con $x_1 = \sqrt{2}/2$. Notiamo che $x_1 > x_0$ infatti $(e^{x_1^2})^2 = e$ mentre $(e^{x_0^2})^2 = 9/4 < e$. Dunque f è concava negli intervalli $]-\infty, -x_1]$, $[-x_0, x_0]$ e $[x_1, +\infty[$ mentre è convessa negli intervalli $[-x_1, -x_0]$ e $[x_0, x_1]$.

(d) Ovviamente le rette verticali $x = k$ intersecano il grafico della funzione nel punto $(k, f(k)$. Tutte le altre rette si possono scrivere nella forma $y = mx+q$. Ci chiediamo dunque per quali m e q l'equazione $mx+q-f(x) = 0$ non ha soluzioni. Se $m = 0$ l'equazione ha soluzione se e solo se $q \in f(\mathbb{R})$ cioè se $q \in [0, 2[$. Se $m > 0$ notiamo che vale $\lim_{x\to+\infty} mx + q - f(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to-\infty} mx + q - f(x) = -\infty$. Per il teorema dei valori intermedi esiste dunque almeno un punto in cui $mx + q - f(x) = 0$ e dunque la retta interseca il grafico di f. Discorso analogo si può fare quando $m < 0$. Riassumendo abbiamo dunque ottenuto che le uniche rette che non intersecano il grafico di f sono le rette orizzontali del tipo $y = q$ con $q \geq 2$ o $q < 0$.

2. Fissati α e β si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n + \beta, \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

(a) Studiare la convergenza della successione quando $0 < \alpha < 1$ e $\beta \geq 0$.

(b) Studiare la convergenza della successione quando $\alpha \geq 1$ e $\beta \geq 0$.

Soluzione.

(a) Supponiamo preliminarmente che la successione converga ad un valore finito $a_n \to a$. In questa ipotesi si deve avere $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta = \alpha a + \beta$ da cui $a = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Mostriamo per induzione che $0 \leq a_n \leq a$ per ogni n. Per $n = 0$ la verifica è immediata. Supponendo ora $0 \leq a_n \leq a$ mostriamo che la stessa stima vale per a_{n+1}. Si ha infatti $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta \geq 0$ essendo a_n, α e β tutti non negativi. D'altra parte si ha anche $\alpha a_n + \beta \leq \alpha a + \beta = a$ e l'asserto è quindi provato.

Mostriamo infine che la successione è crescente. Infatti la disuguaglianza $a_{n+1} \geq a_n$ è equivalente a $\alpha a_n + \beta \geq a_n$ cioè $(1 - \alpha)a_n \leq \beta$ che è vera essendo $a_n \leq a$.

Abbiamo dunque provato che la successione a_n è crescente e limitata. Dunque converge e, per quanto visto all'inizio, il limite non può che essere $a = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

(b) Se $\alpha = 1$ si ha $a_1 = 0$, $a_2 = \beta$, $a_3 = 2\beta$ e per induzione si dimostra facilmente che $a_n = (n - 1)\beta$. Dunque se anche $\beta = 0$ la successione è costantemente nulla (e converge dunque a zero) in caso contrario, se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ la successione diverge a $+\infty$.

Supponiamo ora $\alpha > 1$. In questo caso la successione è strettamente crescente in quanto $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta > a_n + \beta \geq a_n$. Dunque la successione ammette limite $a_n \to a$. Se a fosse un numero finito si avrebbe $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta = a a_n + \beta$ da cui $a = \beta/(1 - \alpha) < 0$. Ma questo è impossibile in quanto $a_n \geq 0$ per ogni n. L'unica possibilità è dunque $a = +\infty$.