

Analisi Matematica I modulo

Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

13 gennaio 2003

1. (a) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{1 + n^2}.$$

- (b) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{1 + n^2}).$$

Soluzione.

- (a) Si ha

$$n - \sqrt{1 + n^2} = \frac{n^2 - (1 + n^2)}{n + \sqrt{1 + n^2}} = \frac{-1}{n + \sqrt{1 + n^2}} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$.

- (b) Si ha

$$\begin{aligned} \sin(\pi \sqrt{1 + n^2}) &= \sin(\pi n + \pi(\sqrt{1 + n^2} - n)) \\ &= \sin(\pi n) \cos(\pi(\sqrt{1 + n^2} - n)) + \sin(\pi(\sqrt{1 + n^2} - n)) \cos(\pi n) \\ &= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{1 + n^2} - n)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Notiamo infatti che $\sin(\pi n) = 0$ in quanto n è intero, mentre $\cos(\pi n) = (-1)^n$ è limitata e $\sin(\pi(\sqrt{1 + n^2} - n)) \rightarrow 0$ per quanto visto al punto precedente.

2. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x - x^2 + x$.

- (a) Studiare la convessità e la monotonia di f .

- (b) Mostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = y$$

ha una e una sola soluzione $x \in \mathbb{R}$.

- (c) Verificare che $|f(x_1) - f(x_2)| \geq |x_1 - x_2|$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

- (a) Si ha $f'(x) = e^x - 2x + 1$ e $f''(x) = e^x - 2$. Dunque $f''(x) \geq 0$ se $x \geq \log 2$; cioè f è convessa sull'intervallo $\{x \geq \log 2\}$ ed è concava su $\{x \leq \log 2\}$. Inoltre dalla studio di f'' si deduce che f' ha minimo assoluto in $\log 2$. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) \geq f'(\log 2) = 2 - 2\log 2 + 1 > 2 - 2 + 1 = 1$. In particolare $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ da cui si conclude che f è strettamente crescente su tutto \mathbb{R} .
- (b) Siccome f è strettamente crescente è anche iniettiva. Inoltre essendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ed essendo f continua, dal teorema di esistenza dei valori intermedi ricaviamo che f è surgettiva. Dunque per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$.

- (c) Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ per il Teorema di Lagrange sappiamo esistere un punto x tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x).$$

Ricordando poi che $f'(x) \geq 1$ e applicando il valore assoluto ad ambo i membri otteniamo:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = |f'(x)| = f'(x) \geq 1$$

da cui si ricava la disuguaglianza desiderata.

Se $x_1 = x_2$ il risultato è ovvio.