

# Analisi Matematica I modulo

## Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

16 dicembre 2002

1. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della seguente funzione:

$$f(x) = e^{1-x^2}.$$

*Soluzione.* Si ha

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}, \quad f''(x) = (4x^2 - 2x)e^{1-x^2}.$$

Studiando il segno delle derivate prima e seconda si trova

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0, \quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dunque  $f$  è monotona crescente sull'intervallo  $] -\infty, 0]$  è monotona decrescente sull'intervallo  $[0, +\infty[$  ed è convessa sugli intervalli  $] -\infty, -2/\sqrt{2}]$  e  $[2/\sqrt{2}, +\infty[$ .

2. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della seguente funzione:

$$f(x) = \log(1 + x^2).$$

*Soluzione.* Si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad f''(x) = 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Studiando il segno delle derivate prima e seconda si trova

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Dunque  $f$  è monotona decrescente sull'intervallo  $] -\infty, 0]$  è monotona crescente sull'intervallo  $[0, +\infty[$  ed è convessa sull'intervallo  $[-1, 1]$ .

3. Sia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x) = (\sqrt[3]{x} + \sin x)^3.$$

Verificare che  $f$  è derivabile su tutto  $\mathbf{R}$  e calcolare la derivata  $f'$ . Studiare la continuità di  $f'$ .

*Soluzione.* Notiamo che  $\sqrt[3]{x}$  non è derivabile per  $x = 0$ . Le altre funzioni coinvolte sono derivabili in ogni punto. Dunque, per  $x \neq 0$  la funzione  $f$  è derivabile e possiamo applicare le regole di derivazione della funzione composta e della somma per ottenere

$$f'(x) = 3(\sqrt[3]{x} + \sin x)^2 \left( \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \cos x \right) = \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 (1 + 3\sqrt[3]{x^2} \cos x).$$

Per  $x = 0$  calcoliamo il limite del rapporto incrementale per verificare che anche in questo caso la derivata esiste:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{h} + \sin h)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\sin h}{\sqrt[3]{h}} \right)^3 = 1$$

(si noti infatti che  $\frac{\sin h}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{h^2} \frac{\sin h}{h} \rightarrow 0$ ).

Otteniamo dunque

$$f'(x) = \begin{cases} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \right)^3 (\sqrt[3]{x} + 3x \cos x) & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la funzione  $f'$  coincide intorno ad ogni punto  $x \neq 0$  con una funzione che è composizione di funzioni continue. Dunque  $f'$  è continua in ogni punto  $x \neq 0$ . Inoltre  $f$  è continua anche in 0 infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 (1 + 3\sqrt[3]{x^2} \cos x) = 1 = f'(0).$$

4. Sia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x) = (\sqrt[5]{x} + \sin x)^5.$$

Verificare che  $f$  è derivabile su tutto  $\mathbf{R}$  e calcolare la derivata  $f'$ . Studiare la continuità di  $f'$ .

*Soluzione.* Si veda l'esercizio precedente (sostituendo ogni 3 con un 5 e ogni 2 con 4).

5. Dire quante soluzioni reali ha l'equazione

$$x^4 - 4x - 1 = 0$$

motivando rigorosamente la risposta.

*Soluzione.* Posto  $f(x) = x^4 - 4x - 1$  si ha  $f'(x) = 4(x^3 - 1)$ . Dunque dallo studio del segno della derivata troviamo che la funzione è strettamente crescente per  $x > 1$  e strettamente decrescente per  $x < 1$ . Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(1) = -6 < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dalla definizione di limite infinito deduciamo quindi che esistono  $x_1 > 1$  con  $f(x_1) > 0$  e  $x_2 < 1$  con  $f(x_2) < 0$ . Dunque per il teorema di esistenza degli zeri esistono due soluzioni dell'equazione  $f(x) = 0$  negli intervalli  $] -\infty, 1[$  e  $]1, +\infty[$ . Siccome in tali intervalli la funzione è strettamente monotona e quindi iniettiva, non ci possono essere altre soluzioni. In definitiva ci sono dunque esattamente 2 soluzioni.

6. Dire quante soluzioni reali ha l'equazione

$$e^x = 3x$$

motivando rigorosamente la risposta.

*Soluzione.* Posto  $f(x) = e^x - 3x$  si tratta di trovare il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = 0$ . Si ha  $f'(x) = e^x - 3$  e dunque la funzione è strettamente crescente per  $x > \log 3$  e strettamente decrescente per  $x < \log 3$ . Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(\log 3) = 3(1 - \log 3) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dalla definizione di limite infinito deduciamo quindi che esistono  $x_1 > \log 3$  con  $f(x_1) > 0$  e  $x_2 < \log 3$  con  $f(x_2) < 0$ . Dunque per il teorema di esistenza degli zeri esistono due soluzioni dell'equazione  $f(x) = 0$  negli intervalli  $] -\infty, \log 3[$  e  $] \log 3, +\infty[$ . Siccome in tali intervalli la funzione è strettamente monotona e quindi iniettiva, non ci possono essere altre soluzioni. In definitiva ci sono dunque esattamente 2 soluzioni.

7. Sia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile che si annulla in tre punti distinti (e non più di tre). Dimostrare che  $f$  non è convessa.

*Soluzione.* Supponiamo per assurdo che  $f$  sia convessa. Siano  $x_1 < x_2 < x_3$  i tre punti in cui si annulla  $f$ . La retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $x_2$  ha equazione  $y = m(x - x_2)$  con  $m = f'(x_2)$ . Siccome la funzione è convessa il grafico della funzione deve trovarsi al di sopra della retta tangente in  $x_2$  cioè  $f(x) \geq m(x - x_2)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ; in particolare questo deve essere vero per  $x = x_1$  e per  $x = x_3$ . Otteniamo dunque  $0 = f(x_1) \geq m(x_1 - x_2)$  e  $0 = f(x_3) \geq m(x_3 - x_2)$  da cui si ottiene  $f'(x_2) = m = 0$ . Dunque per ogni  $x$  si ha  $f(x) \geq 0$ . D'altra parte essendo  $f$  convessa,  $f'(x)$  deve essere crescente e sapendo che  $f'(x_2) = 0$  si ha  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \geq x_2$ . Dunque la funzione  $f$  è crescente per  $x \geq x_2$  e quindi  $f(x) \leq f(x_3)$  per  $x \in [x_2, x_3]$ . Dunque abbiamo ottenuto che  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in [x_2, x_3]$  che contraddice l'ipotesi per cui  $f$  non si annulla in più di tre punti.

8. Sia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile due volte tale che  $f(1) = 1$ ,  $f(0) = 0$  e  $f(-1) = -1$ . Provare che esiste un punto  $x$  tale che  $f''(x) = 0$ .

*Soluzione.* Per il teorema di Lagrange sappiamo esistere due punti  $x_1 \in ]-1, 0[$  e  $x_2 \in ]0, 1[$  tali che

$$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{1} = 1, \quad f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 1.$$

Applicando nuovamente il teorema di Lagrange nell'intervallo  $[x_1, x_2]$  (notiamo che  $x_1 < x_2$ ) alla funzione  $f'$  otteniamo l'esistenza di un punto  $\bar{x}$  tale che

$$f''(\bar{x}) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

**9.2.2006** Corretti alcuni errori di calcolo nelle soluzioni degli esercizi 2 e 3.