Analisi Matematica Uno
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

15 novembre 2002

1. Dire se la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall \nu \; \exists n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

è equivalente a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. In caso affermativo dimostrarlo, in caso negativo esibire un controesempio.

Soluzione. Tale proprietà non è equivalente all'esistenza del limite. Si richiede infatti che la successione a_n sia arbitrariamente vicina ad a solo per *alcuni* valori di n e non per tutti i valori sufficientemente grandi. Prendiamo come controesempio una successione che non converge: $a_n = (-1)^n$ e scegliamo $a = 1$. In questo caso si vede che la successione a_n è *frequentemente* vicina ad a. Infatti dato comunque $\varepsilon > 0$ e dato comunque ν si può scegliere come n un qualunque numero pari maggiore di ν, ad esempio $n = 2\nu$ ottenendo quindi $|a_n - a| = |(-1)^{2\nu} - 1| = 0 < \varepsilon$. Dunque la proprietà in questione è verificata ma sappiamo bene che la successione a_n non converge.

2. Calcolare (o dimostrare che non esiste) il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\cos(1/x)}.$$

Soluzione. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(1/x)}$. Se il limite in questione esistesse e fosse uguale ad ℓ, allora (per il teorema di collegamentro tra limiti di funzione e limiti di successioni) presa una qualunque successione $x_n \to 0$ si avrebbe che $f(x_n) \to \ell$. È sufficiente quindi trovare due successioni a_n, b_n entrambe convergenti a 0 e tali che i due limiti $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ e

$\lim_{n\to\infty} f(b_n)$ siano diversi. Scegliamo dunque $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Sappiamo che $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ e si verifica immediatamente che $f(a_n) = \mathrm{e}^1$ mentre $f(b_n) = \mathrm{e}^{-1}$. Dunque $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

3. Dimostrare che
$$\lim_{x\to 0} x^2(1 + x + \cos x) = 0$$
utilizzando la definizione di limite (trovare esplicitamente δ in funzione di ε).

Soluzione. Dato ε dobbiamo trovare δ in modo che per $|x| < \delta$ si abbia
$$|x^2(1 + x + \cos x)| < \varepsilon.$$
Notiamo che se $|x| < \delta$ si ha
$$|x^2(1 + x + \cos x)| \leq x^2(1 + |x| + |\cos x|) \leq x^2(2 + |x|) < \delta^2(2 + \delta).$$
Dunque sarà sufficiente scegliere δ in modo che
$$\delta^2(2 + \delta) \leq \varepsilon$$
ad esempio si può scegliere $\delta = \min\{1, \sqrt{\varepsilon/3}\}$ cosicché si ottiene
$$\delta^2(2 + \delta) \leq 3\delta^2 \leq \varepsilon.$$

4. Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sin n}{n} = 0$$
utilizzando la definizione di limite (trovare esplicitamente ν in funzione di ε).

Soluzione. Dato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare ν tale che per $n > \nu$ si abbia
$$\left|\frac{\sqrt{n} + \sin n}{n}\right| < \varepsilon.$$
D'altra parte, se $n > \nu$, si ha
$$\left|\frac{\sqrt{n} + \sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\nu} \leq \frac{2}{\sqrt{\nu}}$$

e quindi è sufficiente scegliere $\nu > 4/\varepsilon^2$, ad esempio $\nu = \lceil 4/\varepsilon^2 \rceil$ (il più piccolo intero maggiore di $4/\varepsilon^2$) cosicché si ottiene

$$\frac{2}{\sqrt{\nu}} \leq \frac{2}{\sqrt{4/\varepsilon^2}} = \varepsilon.$$

5. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

   Soluzione. Si ha
$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} \to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$
   in quanto $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e quindi $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$.

6. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}(1-\sin(2x))^{\frac{1}{x}}.$$

   Soluzione. Dai limiti notevoli per le successioni, passando alle funzioni tramite il teorema di collegamento sappiamo che
$$\lim_{x\to 0}(1-\sin(2x))^{\frac{1}{-\sin(2x)}} = \mathrm{e}$$
   essendo $\sin(2x) \to 0$ per $x \to 0$. Analogamente si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = 1.$$
   Dunque
$$(1-\sin(2x))^{\frac{1}{x}} = \left[(1-\sin(2x))^{\frac{1}{-\sin(2x)}}\right]^{-2\frac{\sin(2x)}{2x}} \to \mathrm{e}^{-2}.$$

7. Trovare il limite (se esiste) della seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 - \frac{2}{1+a_n^2}, \\ a_1 = -2. \end{cases}$$

Soluzione. Cerchiamo di capire se la successione è monotòna. La relazione $a_{n+1} \le a_n$ è equivalente a $2 - \frac{2}{1+a_n^2} \le a_n$ cioè (moltiplicando tutto per $1 + a_n^2$ portando a secondo membro e raccogliendo) $a_n(a_n - 1)^2 \ge 0$ che è equivalente a $a_n \ge 0$.

Cerchiamo dunque di capire quando si ha $a_n \ge 0$. Notiamo che $a_{n+1} \ge 0$ è equivalente a $2 - \frac{2}{1+a_n^2} \ge 0$ cioè $1 + a_n^2 \ge 0$ che è sempre verificato. Dunque l'unico termine negativo della successione è il primo $a_1 = -2$, tutti i termini successivi sono positivi. E dunque, a parte il primo termine, la successione è monotòna decrescente. Essendo anche limitata dal basso ($a_n \ge 0$ per $n \ge 2$) la successione ammette limite finito: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Dunque
$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{1+a_n^2} = 2 - \frac{2}{1+\ell^2}$$
da cui si ottiene $\ell(\ell - 1)^2 = 0$ ovvero $\ell \in \{0, 1\}$. Per quanto abbiamo visto finora entrambi i limiti 0 e 1 sono ammissibili. Notiamo però che $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{8}{5} > 1$, $a_3 = \frac{128}{89} > 1$. Proviamo a dimostrare, per induzione, che per ogni $n \ge 2$ si ha $a_n \ge 1$. Per $n = 2$ è vero, essendo $a_2 > 1$. Per $n \ge 2$ si ha poi che $a_{n+1} \ge 1$ è equivalente a $2 - \frac{2}{1+a_n^2} \ge 1$ e cioè $a_n^2 \ge 1$. Dunque se $a_n \ge 1$ anche $a_{n+1} \ge 1$, come volevamo dimostrare. Ne consegue che l'unico possibile limite è $\ell = 1$.

8. Trovare il limite (se esiste) della seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \\ a_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soluzione. Proviamo a dimostrare che la successione a_n è monotòna. La relazione $a_{n+1} \ge a_n$ è equivalente a $a_n^2 - a_n + 1 \ge a_n$ cioè $(a_n - 1)^2 \ge 0$ che è sempre verificata. Dunque la successione a_n è monotòna crescente e quindi il limite $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ esiste finito o infinito.

Sicuramente $\ell > 0$ in quanto la successione è crescente e $a_1 > 0$. Dunque la possibilità $\ell = -\infty$ va scartata. La possibilità $\ell = +\infty$ è, per ora, ammissibile. Se invece ℓ è un numero finito si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 - a_n + 1 = \ell^2 - \ell + 1$$

e cioè $(\ell - 1)^2 = 0$ ovvero $\ell = 1$.

Dunque il limite (che sappiamo esistere) è o 1 oppure $+\infty$. Proviamo a dimostrare per induzione che $a_n \leq 1$ per ogni n. Per $n = 1$ si ha $a_1 = \frac{1}{2} \leq 1$. Per $n \geq 1$ la relazione $a_{n+1} \leq 1$ è equivalente a $a_n^2 - a_n + 1 \leq 1$ cioè $a_n(a_n - 1) \leq 0$. Sappiamo già che $a_n \geq 0$ per ogni n e l'ipotesi induttiva ci garantisce che $a_n \leq 1$ e quindi $a_n(a_n - 1) \leq 0$ è verificata. Dunque se $a_n \leq 1$ anche $a_{n+1} \leq 1$ che è quello che volevamo dimostrare. Essendo dunque $a_n \leq 1$ per ogni n l'unico possibile limite è $\ell = 1$.