# Definizione di limite

11 ottobre 2002

1. Dati comunque una successione $a_n$ ed un numero reale $a$ verificare che le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:

   (a) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n \geq \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (c) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$;
   (d) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n \geq \nu \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$;
   (e) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu + 23 \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (f) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_{n+1} - a| < \varepsilon$;
   (g) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > 17\nu \quad |a_n - a| < \varepsilon/12$;
   (h) $\forall \varepsilon \in \, ]0,1[ \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$.

   Mostrare invece (con degli esempi) che nessuna delle seguenti affermazioni è equivalente alle precedenti:

   (a) $\forall \varepsilon \geq 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_n - a| < 1 + \varepsilon$;
   (c) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (d) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall n \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (e) $\exists \nu \, \forall \varepsilon > 0 \, \forall n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (f) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu \, \forall n > \nu \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon$;
   (g) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall \nu \, \exists n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$;
   (h) $\exists \varepsilon > 0 \, \forall n \quad |a_n - a| < \varepsilon$.