Analisi Matematica Due, II modulo
Soluzioni prova scritta n. 6

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

13 gennaio 2003

1. Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ della seguente equazione differenziale:

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Soluzione. Il polinomio $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ha due radici coincidenti $\lambda_{12} = 1$. Dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0 = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Inoltre siccome anche il termine noto è e^x la soluzione particolare dell'equazione non omogenea sarà del tipo

$$\bar{y} = cx^2 e^x.$$

Sostituendo nell'equazione si trova $c = 1/2$ e quindi tutte le soluzioni dell'equazione data si possono scrivere come

$$y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^x$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt[3]{x(y-1)}ds$$

sulla curva $y = 1 + x^2$ con $x \in [0, 1]$.

Soluzione. Posto $x(t) = t$ e $y(t) = 1 + t^2$ si ha $x'(t) = 1$ e $y'(t) = 2t$ da cui si trova $ds = \sqrt{1 + 4t^2}dt$. Dunque

$$\int_\gamma \sqrt[3]{x(y-1)}ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{12}\left[(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^1 = \frac{5^{\frac{2}{3}} - 1}{12} = \frac{\sqrt[3]{25} - 1}{12}.$$