Analisi Matematica Due
Soluzioni della prova scritta n. 5

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

12 settembre 2002

1. Dire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} & \text{per} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua, derivabile e differenziabile nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Notiamo qualitativamente, che il numeratore della frazione che definisce la funzione f cresce come una potenza 2 mentre al denominatore abbiamo una potenza $2/3$. Essendo $2 > 1 + 2/3$ ci aspettiamo che la funzione sia differenziabile nell'origine (e quindi anche derivabile e continua) con differenziale nullo.

Per provare che la funzione f è differenziabile con differenziale nullo sarà sufficiente provare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha (ricordando che $|\sin x| \leq |x|$)

$$\left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{\sin^2 x + y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}} \leq \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}.$$

Per verifica diretta questa disuguaglianza risulta valida anche per $(x,y) = (0,0)$ e dunque essendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}} = 0$ si ottiene, per confronto, il risultato cercato.

2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{3+|x|^n}.$$

Studiarne la convergenza puntuale e determinare gli intervalli su cui si ha convergenza uniforme.

Soluzione. Consideriamo innanzitutto la convergenza puntuale. Per $x = 0$ si ha chiaramente $f_n(0) = 0$. Per $|x| < 1$, $x \neq 0$ si ha $|x|^n \to 0$ e quindi $f_n(x) \to \infty$. Per $|x| = 1$ si ottiene di nuovo $f_n(x) \to \infty$. Infine per $|x| > 1$ si ha $|f_n(x)| \leq |x|^2 \frac{n}{|x|^n} \to 0$. Dunque la successione di funzioni converge puntualmente solo sull'insieme $\{|x| > 1\} \cup \{0\}$ dove ha come limite puntuale la funzione nulla.

Facciamo ora un rapido studio delle funzioni $f_n(x)$. Notiamo innanzitutto che f_n è pari e dunque sarà sufficiente studiare la funzione per $x \geq 0$.

Si ha $f_n(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. Inoltre dallo studio della derivata prima

$$f_n'(x) = \frac{6nx - (n^2 - 2n)x^{n+1}}{(3 + x^n)^2} \qquad (x \geq 0)$$

(che si annulla nel punto $x_n = 6/(n - 2)$) deduciamo che la funzione è crescente per $x \in [0, x_n]$, ha un massimo assoluto in x_n ed è quindi decrescente per $x \geq x_n$. Sicuramente la convergenza uniforme non ci può essere in nessun intervallo che interseca l'intervallo $[-1, 1]$ in quanto per $|x| \leq 1$ non si ha neppure convergenza puntuale.

Prendiamo dunque in considerazione un intervallo del tipo $[\alpha, \infty[$ con $\alpha > 1$. Su questo intervallo si ha convergenza uniforme in quanto essendo la funzione decrescente si ha $|f_n(x)| \leq f_n(\alpha) \to 0$ per ogni $x \in [\alpha, \infty[$. Lo stesso vale per gli intervalli del tipo $]-\infty, \alpha]$ con $\alpha < -1$. Dunque in ogni intervallo chiuso contenuto in $\{|x| > 1\}$ si ha convergenza uniforme.

Per concludere verifichiamo che non c'è convergenza puntuale sugli intervalli aperti del tipo $]1, \alpha[$ qualunque sia $\alpha > 1$. Infatti essendo $f_n(1) \to_n \infty$ data una qualunque funzione f_n è possibile trovare un punto x_n sufficientemente vicino a 1 e tale che $f_n(x_n) \to \infty$.

3. Trovare tutte le soluzioni di classe $\mathcal{C}^2$ dell'equazione differenziale

$$y = xy' + y' \arctan(y') - \frac{1}{2} \log\left(1 + (y')^2\right).$$

Soluzione. Deriviamo entrambi i membri dell'equazione differenziale data ottenendo la seguente equazione del secondo ordine

$$y' = y' + xy'' + y'' \arctan y' + y' \frac{y''}{1 + y'^2} - \frac{1}{2} \frac{2y'y''}{1 + y'^2}$$

che semplificata diviene

$$(x + \arctan y')y'' = 0.$$

Questa equazione può essere spezzata nelle due equazioni $y'' = 0$ e $x + \arctan y' = 0$. L'equazione $y'' = 0$ ha come soluzione tutte le rette $y = mx + q$. Dobbiamo però ricordarci che le soluzioni dell'equazione ottenuta per derivazione possono differire dalle soluzioni dell'equazione originaria per una costante. Dunque imponiamo anche la condizione

$$y(0) = y'(0) \arctan y'(0) - \frac{1}{2} \log(1 + y'(0)^2) \tag{1}$$

(ottenuna sostituendo $x = 0$ nell'equazione differenziale originaria) ottenendo $q = m \arctan m - \frac{1}{2} \log(1 + m^2)$. Abbiamo dunque provato che il fascio di rette

$$y = mx + m \arctan m - \frac{1}{2} \log(1 + m^2)$$

è soluzione dell'equazione data.

Consideriamo ora l'equazione $x + \arctan y' = 0$ che può essere riscritta come $x = -\arctan y'$. Si vede dunque che necessariamente $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. In questo intervallo l'equazione è equivalente a $y' = -\tan x$ che può essere risolta facilmente per integrazione ottenendo $y(x) = -\log \cos x + c$. Anche in questo caso applicando (1) si ottiene $c = 0$ e dunque la soluzione "singolare" dell'equazione differenziale data è

$$y = -\log \cos x \qquad (x \in]-\pi/2, \pi/2[).$$

Si può infine verificare che le rette del fascio sono tangenti alla soluzione singolare trovata.

4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma 2y \cos x \, ds$$

sulla curva $\gamma(t) = (t, \sin t)$ per $t \in [0, \pi]$.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma 2y \cos x \, ds &= \int_0^\pi 2 \sin t \cos t \sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt \\
&= \int_0^\pi -(1 + \cos^2 t)'(1 + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \, dt \\
&= \left[-\frac{2}{3}(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^\pi = 0.
\end{aligned}$$

Revisioni.
11 aprile 2003: corretta la soluzione dell'ultimo esercizio.