

# Analisi Matematica Due

## Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

30 maggio 2002

1. Si consideri la successione di funzioni  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f_k(x) = e^{-kx^2} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$$

e la serie associata  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ .

- Mostrare che la successione e la serie convergono puntualmente per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ;
- verificare che la successione converge uniformemente su tutto  $\mathbb{R}$  ma la serie non converge totalmente su tutto  $\mathbb{R}$ ;
- verificare che la serie converge totalmente su ogni insieme del tipo  $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \varepsilon\}$  con  $\varepsilon > 0$ .

*Soluzione.* Per quanto riguarda la convergenza puntuale di  $f_k$  basta notare che per  $x = 0$  si ha  $f_k(x) = 0$  e quindi  $f_k(x) \rightarrow 0$ . Per  $x \neq 0$  notiamo che  $\sin(x/\sqrt{k})$  è limitato mentre  $e^{-kx^2}$  tende a zero e quindi  $f_k(x) \rightarrow 0$ . Dunque  $f_k$  converge puntualmente a 0 per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Analogamente per quanto riguarda la serie notiamo che per  $x = 0$  si ha  $\sum_k f_k(0) = 0$  mentre per  $x \neq 0$  si ha  $\sum_k |f_k(x)| \leq \sum_k e^{-2kx^2} = \sum_k (e^{-x^2})^k < +\infty$  essendo la serie geometrica di ragione  $e^{-x^2} < 1$ .

Passiamo alla convergenza uniforme e totale. Innanzitutto si verifica facilmente che posto  $g_k(x) = \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-kx^2}$  si ha  $|f_k(x)| \leq |g_k(x)|$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Calcolare il massimo di  $g_k$  è più facile, si ha infatti

$$g'_k(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2kx^2}{\sqrt{k}} \right) e^{-kx^2}$$

e posto  $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$  si nota che  $g_k$  ha massimo assoluto in  $x_k$  e minimo assoluto in  $-x_k$  (la funzione è dispari). Si ha dunque, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ :

$$|f_k(x)| \leq |g_k(x)| \leq g_k(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2e}} \frac{1}{k}.$$

Dato che  $1/k \rightarrow 0$  abbiamo mostrato che la successione  $f_k$  converge uniformemente a 0. Notiamo però che  $1/k$  non è sommabile e questo ci fa sospettare che la serie  $\sum_k f_k$  non sia totalmente convergente su  $\mathbb{R}$ . Si ha infatti:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \geq f_k(x_k) = \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) e^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2e}} \frac{1}{k}$$

ed essendo l'ultimo termine non sommabile abbiamo dimostrato che  $\sum_k f_k$  non converge totalmente.

Se però ci restringiamo all'insieme  $I_\varepsilon$  abbiamo che per  $x \in I_\varepsilon$  vale

$$|f_k(x)| \leq e^{-kx^2} \leq e^{-k\varepsilon^2} = \left(e^{-\varepsilon^2}\right)^k$$

ed essendo  $e^{-\varepsilon^2} < 1$  la serie converge totalmente.

2. Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sqrt{|\sin x|} + \cos(x + y).$$

Dimostrare che  $f$  ammette massimo e minimo su tutto  $\mathbb{R}^2$ ; determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto.

*Soluzione.* Notiamo innanzitutto che la funzione è  $2\pi$  periodica sia nella variabile  $x$  che nella variabile  $y$ :  $f(x, y) = f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi)$ . Senza perdere generalità possiamo quindi studiare la funzione solo sul quadrato  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Essendo la funzione continua, su tale quadrato ammette massimo e minimo. Tali valori sono massimo e minimo anche su tutto  $\mathbb{R}^2$ , essendo la funzione periodica.

Cerchiamo ora i massimi e minimi locali. Innanzitutto notiamo che tranne che se  $\sin x \neq 0$  la funzione è differenziabile e in tal caso possiamo calcolarne le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\pm \cos x}{2\sqrt{|\sin x|}} - \sin(x + y) \\ f_y &= -\sin(x + y) \end{aligned}$$

(dove  $\pm$  è il segno di  $\sin x$ ). Perché si annullino entrambe le derivate parziali deve essere  $\sin(x + y) = 0$  (quindi  $x + y = k\pi$ ) e deve essere  $\cos(x) = 0$  e quindi  $x = \pi/2 + k\pi$ . Se ci restringiamo al quadrato  $[0, 2\pi]^2$  otteniamo quattro punti critici:  $P_1 = (\pi/2, \pi/2)$ ,  $P_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$ ,  $P_3 = (3\pi/2, \pi/2)$  e  $P_4 = (3\pi/2, 3\pi/2)$ .

Possiamo anche calcolare le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{-|\sin x|\sqrt{|\sin x|} - \cos x \frac{\cos x}{\sqrt{|\sin x|}}}{2|\sin x|} - \cos(x + y) \\ f_{xy} = f_{yx} &= -\cos(x + y) \\ f_{yy} &= -\cos(x + y) \end{aligned}$$

nei punti singolari, essendo  $\cos x = 0$  e  $|\sin x| = 1$  si ottiene

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\frac{1}{2} \mp 1 \\ f_{yy} &= \mp 1 \end{aligned}$$

(dove  $\mp$  è il segno opposto a quello di  $\cos(x + y)$ ). Nei punti critici la matrice Jacobiana risulta essere

$$D^2 f(P_1) = D^2 f(P_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D^2 f(P_2) = D^2 f(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi  $P_1$  e  $P_4$  sono punti di sella mentre  $P_2$  e  $P_3$  sono punti di massimo relativo. Nei punti  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  la funzione  $f$  vale rispettivamente 0, 2, 0, 2.

In questa discussione non abbiamo tenuto conto dei punti in cui la funzione non è differenziabile ovvero i punti  $x = k\pi$ . Restringiamo il nostro studio al

quadrato  $[0, 2\pi]^2$ . Per  $x = 0$  la funzione  $f(0, y) = \cos(y)$  ha un massimo per  $y = 0$  e un minimo per  $y = \pi$ . Notiamo però che ristretta alla retta  $y = 0$  la funzione  $f(x, 0) = \sqrt{|\sin(x)|} + \cos(x)$  ha un minimo relativo, dunque il punto  $(0, 0)$  non è nè massimo nè minimo relativo. Il punto  $(0, \pi)$  invece è un minimo assoluto in quanto  $f(0, \pi) = -1$  ed è  $f(x, y) \geq -1$  (in quanto  $\sqrt{|\sin x|} \geq 0$  e  $\cos(x + y) \geq -1$ ). Discorso analogo può essere fatto per i punti  $(\pi, 0)$  e  $(\pi, \pi)$  che sono il primo un minimo assoluto e il secondo nè massimo nè minimo.

In conclusione in ogni quadrato di periodicità abbiamo due massimi assoluti ( $f = 2$ ) e due minimi assoluti ( $f = -1$ ).

### 3. Determinare il volume del solido

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 + 2\sqrt{x^2 + 2y^2} - x^2 - 2y^2\}.$$

*Soluzione.* Notiamo che il solido  $C$  è il sottografico della funzione  $f(x, y) = 3 + 2\sqrt{x^2 + 2y^2} - x^2 - 2y^2$  sull'ellisse  $E = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ . Si ha dunque

$$\text{Volume}(C) = \iint_E f(x, y) dx dy.$$

La presenza del termine  $x^2 + 2y^2$  ci suggerisce di fare il seguente cambio di coordinate:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \frac{\rho \sin \theta}{\sqrt{2}}$$

che ha come determinante Jacobiano

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\rho \sin \theta & \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [3 + 2\rho - \rho^2] \frac{\rho}{\sqrt{2}} d\theta d\rho \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[ \frac{3}{2}\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \frac{23}{12} \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

### 4. Posto

$$\omega = \frac{2x + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y - x}{x^2 + y^2} dy, \quad \gamma(t) = (t(25t^2 - 16), 9 - 18t^2), \quad t \in [-1, 1]$$

calcolare  $\int_\gamma \omega$ .

*Soluzione.* Innanzitutto si può verificare facilmente che  $\omega$  è una forma chiusa, posto  $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$  si ha infatti

$$f_y(x, y) = g_x(x, y) = \frac{x^2 - y^2 - 4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Notiamo poi che  $\omega$  non è esatta in quanto l'integrale sul cammino  $\varphi_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  è

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_r} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{(2r \cos \theta + r \sin \theta)(-r \sin \theta) + (2r \sin \theta - r \cos \theta)(r \cos \theta)}{r^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -1 d\theta = -2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

La curva  $\gamma$  è una curva con estremi  $\gamma(-1) = (-9, -9)$ ,  $\gamma(1) = (9, -9)$ . Un rapido studio ci porta poi a concludere che  $\gamma$  fa un giro completo in senso antiorario attorno all'origine  $(0, 0)$  che è l'unico punto singolare per la forma  $\omega$ .

Possiamo quindi asserire che  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\varphi} \omega$  se  $\varphi$  è una curva che congiunge i due punti  $(-9, -9)$ ,  $(9, -9)$  e che si avvolge una volta in senso antiorario attorno al punto  $(0, 0)$ . Prendendo la curva  $\varphi = \varphi_r$  con  $r = \sqrt{2}$  e  $t \in [-3\pi/4, 7\pi/4]$  abbiamo le proprietà richieste e otteniamo:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\varphi} \omega = \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} -1 d\theta = -\frac{5}{2}\pi.$$

*Revisioni*

11 aprile 2003: corretta la visualizzazione di  $\mathbb{R}$  nella conversione in HTML

