

# Forme differenziali

22 aprile 2002

1. Determinare tra le seguenti forme differenziali quelle chiuse e quelle esatte:

$$-y dx + \sin x dy, \quad xy dx + \frac{x^2}{2} dy, \quad \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y dx - x dy).$$

2. Sia  $\gamma_r$  la circonferenza di raggio  $r$  di equazione parametrica  $x(t) = r \cos t$ ,  $y(t) = r \sin t$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Posto

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

determinare per ogni  $r > 0$  il valore di  $\int_{\gamma_r} \omega$ .

Dopo aver verificato che  $\omega$  è una forma chiusa, determinare  $\int_{\eta} \omega$  quando  $\eta$  è la curva chiusa di equazione  $x(t) = (2 + 6 \cos t) \sin t$ ,  $y(t) = 12 + 9 \sin t$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).

3. Determinare  $\int_{\gamma} \omega$  quando

$$\gamma(t) = (1 + t^2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \in [-1, 1],$$

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

4. Dato  $r > 0$ ,  $r \neq 1$  poniamo

$$\gamma(t) = (1 + r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\omega = \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2}.$$

Verificare che  $\omega$  è una forma chiusa ma non è esatta. Determinare poi, al variare di  $r$ , il valore di  $\int_{\gamma} \omega$ .

5. Mostrare che la forma

$$\omega = \frac{y dx - (x + 1) dy}{(x + 1)^2 + y^2} - \frac{y dx - (x - 1) dy}{(x - 1)^2 + y^2}$$

è chiusa. Determinare poi  $\int_{\gamma} \omega$  per ognuna delle seguenti curve  $\gamma$  parametrizzate al variare di  $t \in [0, 2\pi]$ :

$$(\sin t - \cos t, 1 + (t - \pi)^2), \quad (\cos t - 1, \sin t),$$

$$(3 + 5 \cos t, \sin t), \quad \left(\cos \frac{t}{2}, t^2 - 2\pi t + 2\right).$$

### Revisioni

**11 aprile 2003:** corretto l'enunciato dell'esercizio 3.

**6 aprile 2004:** modificate le curve nell'esercizio 5.