Convergenza uniforme

22 ottobre 2001

1. (a) Provare che la successione $f_k(x) = \sin(x + 1/k)$ converge uniformemente a $\sin x$ su tutto $\mathbf{R}$.

   (b) Provare che la successione $f_k(x) = (x + 1/k)^2$ non converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$ ma converge uniformemente su $[-10, 10]$.

   (c) Provare che se $f\colon I \to \mathbf{R}$ ($I \subset \mathbf{R}$) è una funzione uniformemente continua, e a_k è una successione infinitesima, allora la successione $f_k(x) = f(x + a_k)$ converge uniformemente su I.

2. Per le seguenti successioni di funzioni dire in quali punti c'è convergenza puntuale e su quali intervalli $]a, b[$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ si ha convergenza uniforme:

$$x^k, \quad \arctan kx, \quad \arctan x/k, \quad k \arctan x/k,$$
$$\tfrac{kx}{1+k^2x^2}, \quad \tfrac{\sin x}{ke^x} + \tfrac{k}{1+(x-k)^2}.$$

3. Data una funzione continua $f\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ poniamo $f_k(x) = f(kx)$.

   (a) Provare che f_k converge uniformemente su $[0, +\infty[$ se e solo se f è costante.

   (b) Provare che f_k converge uniformemente su $[1, +\infty[$ se e solo se esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile nel punto x_0. Si considerino gli ingrandimenti di f in x_0:

$$f_k(x) = k(f(x_0 + x/k) - f(x_0)).$$

   Provare che f_k converge uniformemente alla funzione $xf'(x_0)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ per $k \to +\infty$.