

Convergenza uniforme

22 ottobre 2001

- Provare che la successione $f_k(x) = \sin(x + 1/k)$ converge uniformemente a $\sin x$ su tutto \mathbf{R} .
 - Provare che la successione $f_k(x) = (x + 1/k)^2$ non converge uniformemente su tutto \mathbf{R} ma converge uniformemente su $[-10, 10]$.
 - Provare che se $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ ($I \subset \mathbf{R}$) è una funzione uniformemente continua, e a_k è una successione infinitesima, allora la successione $f_k(x) = f(x + a_k)$ converge uniformemente su I .
- Per le seguenti successioni di funzioni dire in quali punti c'è convergenza puntuale e su quali intervalli $]a, b[$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ si ha convergenza uniforme:

$$x^k, \quad \arctan kx, \quad \arctan x/k, \quad k \arctan x/k, \\ \frac{kx}{1+k^2x^2}, \quad \frac{\sin x}{ke^x} + \frac{k}{1+(x-k)^2}.$$

- Data una funzione continua $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ poniamo $f_k(x) = f(kx)$.
 - Provare che f_k converge uniformemente su $[0, +\infty[$ se e solo se f è costante.
 - Provare che f_k converge uniformemente su $[1, +\infty[$ se e solo se esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile nel punto x_0 . Si considerino gli ingrandimenti di f in x_0 :

$$f_k(x) = k(f(x_0 + x/k) - f(x_0)).$$

Provare che f_k converge uniformemente alla funzione $xf'(x_0)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ per $k \rightarrow +\infty$.