Limiti di funzioni in due variabili

4 ottobre 2001

1. Dire per quali punti $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sqrt{x^2 + |y \sin y|}}{(y+1)^2 e^y + \cos x + 1}.$$

2. Sia $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $\lim_{r\to 0^+} f(r) = l$. Verificare che allora si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) = l;$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(|x| + |y|) = l;$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(\max\{|x|, |y|\}) = l.$$

3. Verificare che vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^6 + y^8}}{x^2 + y^2} = 0.$$

4. Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

   Dimostrare che il limite seguente non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   nonostante che per ogni $y \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$$

   e per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1.$$

5. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } |y| < x^2 \\ \frac{(|y|+x^2)^3}{|y|+y^2} & \text{se } ||y| \geq x^2 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Provare che f è continua nel punto $(0,0)$.

6. Sia $f\colon D \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{(x^2+y^2)(\sqrt{y^2-|x|}+1)}$$

dove $D \subset \mathbf{R}^2$ è l'insieme dei punti dove questa espressione è ben definita. Provare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

7. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)(x-2)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x(x-2) & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Verificare che f è continua.