1) Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ di classe $C^\infty$, positiva insieme con tutte le derivate, ossia:

$$f^{(n)}(x) \geq 0 \qquad \forall x,\ \forall n$$

Si dimostri che $f$ è analitica, ovvero che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un intorno di $x$ in cui $f$ è sviluppabile in serie di potenze.

2) Sia $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Si ponga per ogni $r > 0$:

$$\varphi(r) := \left( \int_0^1 |f(t)|^r dt \right)^{1/r}, \qquad l := \sup_{[0,1]} |f|$$

Si dimostri che:

$$\varphi(r) \leq l \quad \forall r > 0, \qquad \lim_{r \to \infty} \varphi(r) = l$$

3) Sia $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}, \qquad x \in [0,1]$$

Si ponga

$$a_n := \int_0^1 |f(t)|^{(-1)^n n} dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Si calcoli il raggio di convergenza delle serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n^2)} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n^2)}$$