23 febbraio 2000

1. (a) Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e sia $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha
$$x'(t) = f(x(t)).$$
Provare che
   i. $\exists t \in \mathbb{R}\colon f(x(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}\colon f(x(t)) = 0.$
   ii. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = l \quad \Rightarrow \quad f(l) = 0.$

   (b) Sia $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Provare che se vale (per un certo $c > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$)
$$x'(t) \geq cx(t) \qquad \forall t \geq t_0$$
allora si ha $x(t) \geq x(t_0)e^{ct}$ per ogni $t \geq t_0$. (*Suggerimento:* studiare la funzione $x(t)e^{-ct}$).

   (c) Sia $x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1[)$. Provare che se vale (per un certo $c > 0$)
$$\begin{aligned} x(t) &> 0 \qquad && \forall t \in [t_0, t_1[\\ x'(t) &\geq cx^2(t) \qquad && \forall t \in [t_0, t_1[\end{aligned}$$
allora si ha
$$x(t) \geq \frac{1}{c(t_0 - t) + \frac{1}{x(t_0)}}$$
per ogni $t \in [t_0, t_1[$ e in particolare se ne deduce che $t_1 \leq t_0 + \frac{1}{cx(t_0)}$. (*Suggerimento:* studiare la funzione $\frac{1}{x(t)} + ct$).

   (d) Si studi il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} x'(t) = (x(t) - 1)^2(x(t) + 1)x(t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. (a) Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date da
$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{4}\cos y, \\ g(x, y) &= \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{2}\cos y. \end{aligned}$$
Provare che per ogni $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ si ha
$$|f(x, y) - f(x', y')| + |g(x, y) - g(x', y')| \leq \frac{11}{12}|x - x'| + \frac{3}{4}|y - y'|.$$

   (b) Si consideri la funzione $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|.$$
Provare che d è una distanza su $\mathbb{R}^2$.

   (c) Si provi che il seguente sistema:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{4}\cos y \\ \\ y = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{2}\cos y \end{cases}$$
ammette una unica soluzione.