15 dicembre 1999

1. Sia $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua. Provare che esiste $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = x$.

2. Si consideri l'equazione integrale
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x). \qquad (*)$$
   (a) Si trovino tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che verificano $(*)$.
   (b) Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica $(*)$ allora f è differenziabile infinite volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (c) Si trovino tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verificano $(*)$.

3. Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si dice invece *dispari* se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Siano f e g funzioni pari. Si dica (quando possibile) se le funzioni
$$(f(x))^n \qquad f(x)g(x) \qquad f(g(x)) \qquad f(x){+}g(x) \qquad f'(x) \qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   sono pari o dispari. Si faccia lo stesso per f e g dispari, per f pari e g dispari e infine per f dispari e g pari.
   (b) Si calcoli
$$\int_{\log(0.5)}^{\log(2)} \frac{\sin x \frac{\sqrt{\sin^2(\cos x)+\pi e^{(x^4)}}}{1+(xe^{\cos x}\sin x)^2} + 2\sin(x^2+2)\arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)}{1+e^{-\frac{x^2}{2}} + x^7\sin(-\pi x) + \frac{12}{11}|x|^{2\pi+1}}\,\mathrm{d}x.$$
   (c) Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$ tale che
$$\begin{cases} u'(x) &= e^{\cos x} \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$
   Si provi che
$$\int_{-1}^{1} u(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

4. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   (a) Provare che f non può avere esattamente 3 zeri.
   (b) Provare che se f ha esattamente due zeri allora
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$
   (*Suggerimento.* Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa ($I \subset \mathbb{R}$), allora per ogni $x_0 \in I$ esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$).

5. Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^2$ tale che
$$\begin{cases} u''(x) &= \dfrac{1}{1+e^{u(x)}} \\ u'(0) &= 1 \\ u(0) &= 0. \end{cases}$$
   Si provi che
$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty.$$

6. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$. Provare che

$$\int_0^1 (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t \geq (f(0) - f(1))^2$$

e che se vale l'uguaglianza allora f è lineare (cioè $f(t) = at + b$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$).