

1 dicembre 1999

1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e siano $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Posto

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$$

si provi che G è derivabile e che

$$G'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

2. Per ogni $\epsilon > 0$ sia data $g_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

(a) $|t| > \epsilon \Rightarrow g_\epsilon(t) = 0$;

(b) $\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t) dt = 1$;

(c) $g_\epsilon(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrare che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t)g_\epsilon(t) dt = f(0).$$

Provare inoltre che se le g_ϵ e f sono funzioni derivabili con derivata continua, allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t)g'_\epsilon(t) dt = -f'(0).$$

3. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente, e sia $X \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei punti in cui f non è continua. Dimostrare che l'insieme X è al più numerabile cioè che esiste una funzione iniettiva $g: X \rightarrow \mathbb{N}$. (Suggerimento: cercare una funzione iniettiva $h: X \rightarrow \mathbb{Q}$).
4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con derivata continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Dire (giustificandolo) quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0;$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (f(x) - l) dx = 0;$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l.$$