

## 24 novembre 1999

1. Notazione: se  $I$  è un insieme (insieme degli indici),  $X$  è un insieme (insieme ambiente), e per ogni  $i \in I$  è dato un insieme  $A_i \subset X$  allora si definisce l'unione degli  $A_i$  come:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

- (a) Si dia una definizione analoga per l'intersezione  $\bigcap_{i \in I} A_i$  e si verifichi che vale la formula

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

- (b) Sia  $I$  l'insieme degli interi positivi e definiamo, per  $n \in I$ ,

$$A_n = \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad B_n = \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[, \quad C_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad D_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[.$$

Si determinino:

$$\bigcup_{n \in I} A_n, \quad \bigcup_{n \in I} B_n, \quad \bigcup_{n \in I} C_n, \quad \bigcup_{n \in I} D_n.$$

2. Notazione:

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf \{f(x) : x \in A\} = \inf f(A).$$

Sia  $I = ]0, +\infty[$ . Si determinino i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} \sup_{y \in I} \arctan \frac{y}{x}; & \quad \sup_{x \in I} \inf_{y \in I} \arctan \frac{y}{x}; \\ \inf_{y \in I} \sup_{x \in I} \arctan \frac{y}{x}; & \quad \inf_{x \in I} \inf_{y \in I} \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

3. Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata (cioè tale che esiste  $M > 0$  per cui  $|g(x)| < M$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ). Dimostrare che la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = xg(x)$  è continua in 0.
4. Dire, nei seguenti casi, se vi sono funzioni con la proprietà specificata. In caso affermativo si trovi un esempio, in caso negativo si provi quanto asserito:
- (a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  continua, surgettiva;
  - (b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  continua, iniettiva;
  - (c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  continua, bigettiva;
  - (d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  continua, bigettiva;
  - (e)  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua, surgettiva;
  - (f)  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua, surgettiva;
  - (g)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, surgettiva;
  - (h)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bigettiva.
5. Sia  $C$  un sottoinsieme del piano cartesiano, e sia  $p(t)$  il punto del piano di coordinate  $(t, 0)$ . Consideriamo la funzione  $f_C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$f(t) = \text{dist}(p(t), C) = \inf_{q \in C} d(p(t), q) = \inf_{(x,y) \in C} \sqrt{(x-t)^2 + y^2}.$$

- (a) Si provi che la funzione  $f_C$  è continua.
  - (b) Supponiamo ora che  $\text{dist}(0, C) < 1$ . Si provi che in questo caso  $f_C$  ammette minimo.
  - (c) Si trovi un insieme  $C$  per cui  $f_C$  non ammette minimo.
6. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile tale che  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Provare che  $f$  è monotona.