

Esercizi (2/12/1999)

1. Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni a valori reali; dimostrare:

$$\sup_{x \in I} (f + g) \leq \sup_{x \in I} f + \sup_{x \in I} g; \quad \inf_{x \in I} (f + g) \geq \inf_{x \in I} f + \inf_{x \in I} g;$$

$$f, g \geq 0 \Rightarrow \sup_{x \in I} (fg) \leq \sup_{x \in I} f \cdot \sup_{x \in I} g; \quad f, g \leq 0 \Rightarrow \inf_{x \in I} (fg) \geq \inf_{x \in I} f \cdot \inf_{x \in I} g;$$

Fornire per ciascuno dei casi un esempio in cui vale l'uguaglianza ed uno in cui vale la disuguaglianza.

2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, definiamo funzioni $S_x, L_x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$S_x(r) = \sup_{]x-r, x+r[} f; \quad L_x(r) = \inf_{]x-r, x+r[} f.$$

Dimostrare:

- S_x, L_x sono monotone;
- Se

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} S_x(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} L_x(r)$$

allora f è continua in x . (Vale anche l'implicazione contraria?)

3. Poniamo

$$E_n = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^{2n} + x_2^{2n} < 1\}$$

e

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$$

Dire se è vero che $E_{n+1} \supset E_n$; dimostrare che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = Q$.