Esercizi

1 dicembre 1999

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   i) se $x > 0$, allora $f(x) < 0$;
   ii) esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x > \varepsilon$;
   iii) per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\eta > 0$ tale che per ogni $x > \eta$ si ha $f(x) > \varepsilon$.

2. Dire in quali dei seguenti casi esiste il limite e determinarlo;
$$\lim_{x\to 0} \sin(1/x), \quad \lim_{x\to+\infty} \sin x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} \cos x^2,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} x^x.$$

3. Dimostrare che se $f : A = (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ é una funzione decrescente, allora
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{x\in A} f(x).$$

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$; dimostrare che esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) > \delta$ per ogni $x \in [a, b]$.

5. Dimostare che una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monotona é continua se e solo se $f((a, b))$ é un intervallo.

6. Dimostrare che se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é una funzione continua e monotona, allora f^{-1} é continua.

7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; dimostrare che se l'immagine di f é un insieme discreto, allora f é costante.

8. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $P(x)$ un polinomio non nullo; dimostrare che se $P(f(x)) = 0$, allora f é costante.

9. Dimostrare che ogni polinomio di grado dispari ammette almeno una radice.

10. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua; dimostare che esiste almeno un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che $f(x) = ax$ per un qualche $a \in \mathbb{R}$.

12. Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q, \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ primi tra loro}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dimostrare che f é continua sugli irrazionali ed é discontinua sui razionali.

13. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua con A limitato; dimostrare che $f(A)$ é limitato.

14. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana; dimostrare che f é uniformemente continua.

15. Per ogni $f, g \in \mathcal{C}(a,b)$ definiamo

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Dimostrare che d definisce una distanza su $\mathcal{C}(a,b)$.

16. Dimostrare il teorema di Cauchy: date due funzioni $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e devabili in (a,b), allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

17. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ tale che $f'(x) \to l$ per $x \to x_0$. Dimostrare che f é derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$.

18. Dimostrare che se $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, allora f é Lipschitziana in $[a,b]$

19. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che eistono $C > 0$ e $k > 1$ per cui

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che f é costante.

20. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x_0 \in (a,b)$; dimostrare che

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx = f(x_0).$$

21. Dire se é vero o falso che se $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ é una funzione con f^2 integrabile é integrabile.

22. Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, indichiamo con $f(x) \vee 0 = \max\{f(x), 0\}$, $f(x) \wedge 0 = \min\{f(x), 0\}$. Dimostrare che se f é integrabile secondo Riemann, allora sono integrabili pure $f \vee 0$, $f \wedge 0$ e $|f|$.

23. Dimostrare che se f, g sono due funzioni Riemann integrabili , allora $f \cdot g$ é integrabile secondo Riemann.

24. Sia f una funzione integrabile secondo Riemann continua in $x_0 \in (a, b)$; dimostrare che la funzione integrale F é derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$.

25. Dimostare che se f é derivabile in un punto x_0, allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Dimostrare con un controesempio che non vale l'implicazione inversa.