Dicembre 99

1. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile su ogni intervallo compatto e si definisca $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ come
$$g(t) = \int_{1/t^2}^{1/t} f(st)ds\,.$$
   (a) Nel caso in cui f sia continua si calcoli la funzione derivata di g.
   (b) Si calcoli il
$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$
   (c) Se vale $\lim_{s\to\infty} f(s) = l \in \mathbb{R}$ si calcoli (se esiste) il limite
$$\lim_{t\to 0} t^2 g(t)\,.$$

2. Siano date due funzioni $f, g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sul loro dominio e derivabili su $(0, +\infty)$.
   (a) Se valgono le condizioni
$$f(0) = g(0) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} |f(t) - g(t)| = 0$$
   stabilire se esiste un punto $\xi \in (0, +\infty)$ tale che $f^{'}(\xi) = g^{'}(\xi)$.
   (b) Se $f(0) = 0$ ed e´ dato $\alpha > 0$ tale che
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(x)}{\alpha x} = 1$$
   Stabilire la veridicita´ delle seguenti affermazioni motivandone la risposta
   (b1) Esiste un punto $\xi \in (0, +\infty)$ tale che $f^{'}(\xi) = \alpha$,
   (b2) $|f(x) - \alpha x| \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow +\infty$,
   (b3) $f^{'}(x) \longrightarrow \alpha$ per $x \longrightarrow +\infty$.

3. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che esista $M > 0$ con $|f^{'}(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si definisca la funzione $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\infty < a < b < +\infty$, tale che $g(x) = f^{'}(x)$. Si assuma che g sia Riemann integrabile e che abbia massimo e minimo sull'intervallo $[a, b]$. Stabilire se vale il teorema della media integrale per la funzione g sull'intervallo $[a, b]$.

4. Sia data una funzione $f : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(t) \longrightarrow 0$ per $t \to 0$. Se esistono due numeri $\alpha < \beta$ e $x, y \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{f(x)}{x} > \beta \quad \text{e} \quad \frac{f(y)}{y} < \alpha$$
   Si puo´ concludere che $f^{'}((-\infty, 0)) \supset [\alpha, \beta]$?