Esercizi 26/01/00

q) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$. Detti $M_0 = sup_{\mathbb{R}}|f(x)|$, $M_1 = sup_{\mathbb{R}}|f'(x)|$, $M_2 = sup_{\mathbb{R}}|f''(x)|$, provare che $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. Trovare una funzione per cui si ha l'uguaglianza.

w) Sia f una funzione reale derivabile tre volte in $[-1, 1]$, tale che

$$f(-1) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f'(0) = 0,$$

provare che $\exists x \in [-1, 1]$ tale che $f^{(3)}(x) \leq 3$.

e) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che se esiste

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

allora esiste $f''(x) = L$. Mostrare con un esempio che può esistere L ma non $f''(x)$.

r) Enunciare e dimostrare una sorta di formula del valor medio per funzioni da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

t) Sviluppare in serie di taylor nel punto $x = 1$ le seguenati funzioni

$$x^\alpha \qquad log(x)$$

y) Calcolare le seguenti somme (se non avete ancora fatto le serie vi dico io che queste somme esistono e sono finite)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$$

u) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{(1+x)} - 1) - (1 - \sqrt{(1-x)})}{x^2}$$