Appendice: Il teorema di Baire su $\mathbb{R}$

Notazioni: se $A \subset \mathbb{R}$ si definisce ls parte interna di A $int(A) = \{x \in A : \exists \delta > 0(\forall y \in \mathbb{R}(|y - x| < \delta \Rightarrow y \in A))\}$, il complementare di A in $\in R$ $-A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$e la chiusura di A, $\overline{A} = -int(-A)$.

Se $x, \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$, $B(x, \delta)$ indica la palla di centro x e raggio delta, ossia $]x - \delta, x + \delta[$.

Se $\{A_i\}_{i \in I}$ e' una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ si pone

$$\bigcup_i A_i = \{x \in \mathbb{R} : \exists i \in I(x \in A_i)\} \quad \text{e} \quad \bigcap_i A_i = \{x \in \mathbb{R} : \forall i \in I(x \in A_i)\}.$$

Esercizio 1 *Provare che* $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta \in \mathbb{R}^+(B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset)\}$ *e che* $int(A) = -\overline{(-A)}$

Esercizio 2 *Provare che* $int(A)$ *e' l'aperto piu' grande contenuto in* A. *Provare che* $\overline{A}$ *e' il chiuso piu' piccolo che contiene* A.

Esercizio 3 *Provare che* A *e' denso in* $\mathbb{R}$ *se e solo se* $int(-A) = \emptyset$.

Esercizio 4 *Provare che* $\bigcup_i A_i = -(\bigcap_i(-A_i))$ *e che* $\bigcap_i A_i = -(\bigcup_i(-A_i))$.

E quando dico provare intendo provare!

Teorema 5 (Baire per $\mathbb{R}$) *Sia* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *una famiglia di aperti densi in* $\mathbb{R}$. *Allora* $\bigcap_i A_i$ *e' denso in* $\mathbb{R}$.

Teorema 6 *Sia* $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *una famiglia di chiusi con parte interna vuota in* $\mathbb{R}$. *Allora* $\bigcup_i C_i$ *ha parte interna vuota in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 7 *Dimostrare che il Teorema 5 vale se e solo se vale il Teorema 6.*

Esercizio 8 *Dimostrare che* A *e' denso in* $\mathbb{R}$ *se e solo se per ogni intervallo aperto non vuoto* J *si ha* $A \cap J \neq \emptyset$.

Teorema 9 *Sia* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *una famiglia di aperti densi in* $\mathbb{R}$. *Allora per ogni intervallo aperto non vuoto* J *si ha* $\bigcap_i A_i \cap J \neq \emptyset$.

Esercizio 10 *Dimostrare che il Teorema 5 vale se e solo se vale il Teorema 9.*

Dimostrazione del Teorema 9:

Sia I un intervallo aperto non vuoto,

Esercizio 11 *Dimostrare che esiste una famiglia di punti* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, *con* $x_i \in \mathbb{R}$, *e una famiglia di raggi* $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, *con* $0 < r_i < \frac{1}{2^i}$, *tali che* $B(x_i, r_i) \subset I \cap A_1 \cap \ldots \cap A_i$ *e* $\overline{B(x_{i+1}, r_{i+1})} \subset B(x_i, r_i)$.

Esercizio 12 *Dimostrare che esiste* $x \in \mathbb{R}$ *tale che* $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall n \in \mathbb{N}(n > m \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon))$.

Esercizio 13 *Dimostrare che* $x \in I \cap A_1$.

Esercizio 14 *Dimostrare che* $x \in I \cap (\bigcap_i A_i)$.

Ne segue che $I \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$. Dalla arbitrarieta' dell'intervallo I segue la tesi.

Il Teorema 9 e' cosi' dimostrato, e quindi anche il 5 e il 6.

Esercizio 15 *Provare che un insieme numerabile e denso in* $\mathbb{R}$ *non puo' essere ottenuto come intersezione numerabile di aperti.*

Definizione: sia $\varepsilon > 0$. Una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice ε-continua in x se $\exists \delta > 0$ tale che $y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$

Esercizio 16 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e sia* C *l'insieme dei punti in cui* f *e' continua. Provare che* C *e' intersezione numerabile di aperti. (ε-suggerimento: guardare come sono fatti i punti* $\frac{1}{2^n}$*-continuita').*

Esercizio 17 *Provare che non esiste una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $C = \mathbb{Q}$.