

### Esercizi 8 dicembre '99

i) Sia  $I$  un insieme (di indici) e  $\forall i$  sia  $X_i \subset \mathbb{R}$  non vuoto.

-Si dimostri che non e' vero in generale che

$$\sup_{i \in I} \inf X_i = \inf_{i \in I} \sup X_i \quad (1)$$

-Si dica in oltre se valgono

$$\sup_{i \in I} \inf X_i \leq \inf_{i \in I} \sup X_i \quad \sup_{i \in I} \inf X_i \geq \inf_{i \in I} \sup X_i$$

-Se gli  $X_i$  sono intervalli chiusi non vuoti, si dia una condizione necessaria e sufficiente per cui valga 1.

ii) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e sia  $x \in \mathbb{R}$ .  $\forall i \in (0, +\infty)$  sia  $J_i = \{f(y) : |y - x| < i\}$ , si definiscano le seguenti funzioni  $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$g(t) = \sup_{i < t} \inf J_i, \quad h(t) = \inf_{i < t} \sup J_i$$

Dimostrare che esistono  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ , dire che relazioni sussistono tra i due limiti e provare che  $f$  e' continua in  $x$  se e solo se i limiti coincidono.

Dare una definizione analoga per  $x = \infty$  e vedere cosa succede.

iii) Sia  $I$  un insieme (di indici) e  $\forall i$  sia  $X_i = (x_i^0, x_i^1) \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto non vuoto. Sapendo che  $\forall i, j \in I, i \neq j$  si ha  $X_i \cap X_j = \emptyset$ , dimostrare che  $I$  e' un insieme numerabile.

iv) Date due funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si definiscono

$$f \wedge g(x) = \inf\{f(x), g(x)\} \quad f \vee g(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

Dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono continue, anche  $f \wedge g$  e  $f \vee g$  lo sono.

Vedere cosa succede se  $f$  e  $g$  sono: derivabili, derivabili con derivata continua, lipschitziane.

Rifare tutto considerando questa volta una famiglia infinita di funzioni  $\{f_i : i \in I\}$  e si definendo  $\bigvee_I f_i(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$  e  $\bigwedge_I f_i(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$ .

v) Si dia un esempio di funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile tale che  $f'$  non sia integrabile.