ESERCIZI

16 aprile 2024

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile su ogni intervallo compatto ($\equiv$ chiuso e limitato) e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponendo che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx < +\infty,$$
si analizzino le seguenti affermazioni dimostrandole se si ritengono vere o smentendole con un controesempio se si ritengono false.
    - $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.
    - f continua $\Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.
    - f derivabile $\Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.
    - f uniformemente continua $\Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che
$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che
$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}.$$
Si provi che f e' uniformemente continua.

4. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esistono e coincidono i due seguenti limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$
Allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0$.