

## Compito di Analisi II/A

17 settembre 1998

1. Trovare la funzione  $x(t)$  tale che

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$$

sapendo che  $x(0) = 0$  e  $x(1) = 1$ .

Soluzione. Si tratta di una equazione del secondo ordine, lineare, omogenea, a coefficienti costanti. Gli zeri del polinomio caratteristico  $\lambda^2 - 3\lambda + 2$  sono  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Dunque la soluzione generale è  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$  e quindi  $x(0) = c_1 + c_2 = 0$ ,  $x(1) = c_1 e + c_2 e^2 = 1$  da cui si trova

$$x(t) = \frac{e^t - e^{2t}}{e - e^2}.$$

2. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

sulla corona circolare  $D = \{(x, y): \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali di  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Perché si annullino entrambe le derivate deve essere  $y = \pm x$ . Per  $x = y$  si ha  $f(x, y) = 1/2$ , per  $x = -y$  si ha  $f(x, y) = -1/2$ . Cerchiamo i massimi e minimi di  $f$  sul bordo del dominio. Sulla circonferenza di raggio  $r$  (per  $r = 1, 1/2$ ), posto  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  si ha

$$g(\theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta).$$

La funzione  $\sin(2\theta)$  per  $\theta \in [0, 2\pi]$  assume massimo in  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$  e minimo in  $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$  che corrispondono ai punti delle due circonferenze che intersecano le rette  $x = y$  e  $x = -y$  che abbiamo già analizzato. In definitiva abbiamo massimi assoluti nei punti  $\{x = y\} \cap D$  in cui la funzione vale  $1/2$  e minimi assoluti nei punti  $\{x = -y\} \cap D$  in cui la funzione vale  $-1/2$ .

Soluzione alternativa. Ci mettiamo in coordinate polari:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . La funzione diventa

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta).$$

Dunque la funzione dipende solo da  $\theta$  e ha massimo per  $\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$  ( $f(\theta) = \frac{1}{2}$ ) e minimo per  $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$  ( $f(\theta) = -\frac{1}{2}$ ).

3. Si consideri la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(x^2 + 1)^\alpha}{k^2}.$$

Dire per quali  $\alpha \in \mathbf{R}$  c'è convergenza puntuale e per quali  $\alpha$  c'è convergenza uniforme.

Soluzione. Notiamo che

$$f_n(x) = (x^2 + 1)^\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

e dunque la successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = (x^2 + 1)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Sia ora  $g_k(x) = \frac{(x^2+1)^\alpha}{k^2}$ . Se  $\alpha \leq 0$  notiamo che  $(x^2 + 1)^\alpha \leq 1$  e quindi

$$\|g_k\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{(x^2 + 1)^\alpha}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

e siccome  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$  si ha che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$  è totalmente convergente e quindi la successione  $f_n(x)$  converge uniformemente.

D'altra parte ricordiamo che se la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$  converge uniformemente, necessariamente si deve avere  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$ . Ma nel caso  $\alpha < 0$  le funzioni  $g_k(x)$  non sono limitate, anzi si ha  $\lim_{x \rightarrow \infty} g_k(x) = +\infty$  e quindi  $\|g_k\| = +\infty$  e la serie non può convergere uniformemente.

Soluzione alternativa. Per studiare la convergenza uniforme si può anche procedere nel modo seguente. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| (x^2 + 1)^\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sup_{x \in \mathbf{R}} (x^2 + 1)^\alpha. \end{aligned}$$

Nel caso  $\alpha \geq 0$  essendo  $\sup_{x \in \mathbf{R}} (x^2 + 1)^\alpha = 1$  si trova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$$

e quindi la serie converge uniformemente. Nel caso  $\alpha < 0$  si ha  $\sup_{x \in \mathbf{R}} (x^2 + 1)^\alpha = \infty$  e quindi  $\|f_n - f\| = \infty$  e la successione non converge uniformemente.