Compito di Analisi II/A

23 giugno 1998

1. *Calcolare il valore massimo e il valore minimio della funzione*

$$f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy + 3x$$

sul quadrato $Q = \{(x,y) \colon 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3\}$.

Soluzione. Per trovare i punti critici interni al quadrato calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 6y + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y - 6x. \end{aligned}$$

Perché le derivate parziali si annullino contemporaneamente si deve avere quindi $x = y$ e $x^2 - 2x + 1 = 0$, cioé $x = y = 1$. Dunque l'unico punto critico di f è il punto $(1,1) \in Q$. Consideriamo ora le restrizioni di f ai quattro lati del quadrato: $f_1(t) = f(t,0),\ f_2(t) = f(t,3),\ f_3(t) = f(0,t),\ f_4(t) = f(3,t)$ tutte definite per $t \in [0,3]$. Cerchiamo ora i punti critici di queste quattro funzioni, cioè i punti $t \in [0,3]$ in cui si annulla la derivata:

$$\begin{aligned} f_1'(t) = 3t^2 + 3 = 0 &\qquad t = 0 \\ f_2'(t) = 3x^2 - 15 = 0 &\qquad t = \sqrt{5} \\ f_3'(t) = 3t^2 = 0 &\qquad t = 0 \\ f_4'(t) = 6t - 18 = 0 &\qquad t = 3. \end{aligned}$$

Considerando anche i vertici del quadrato dobbiamo confrontare i seguenti valori di f:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 \\ f(\sqrt{5},3) &= 27 - 10\sqrt{5} \cong 4.6 \\ f(0,0) &= 0 \\ f(0,3) &= 27 \\ f(3,0) &= 36 \\ f(3,3) &= 9 \end{aligned}$$

dunque il massimo assoluto si ha per $(x,y) = (3,0)$ ed è 36 mentre il minimo assoluto si ha per $(x,y) = 0$ ed è 0.

2. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2(t)\sin t \\ x(0) &= a \end{cases}$$

nei tre casi $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$, *indicando in ognuno il dominio massimo di esistenza della soluzione.*

Soluzione. L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili. Notiamo subito che $x(t) = 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale e, essendoci unicità delle soluzioni, sappiamo che per ogni altra soluzione $x(t) \neq 0$ per ogni t.

Supponendo dunque $x(t) \neq 0$ possimo scrivere:

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = \sin t$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{-1}{x(t)} = \frac{d}{dt} - \cos t$$

e quindi otteniamo

$$\frac{1}{x(t)} = \cos t + c$$

sapendo che $x(0) = a$ otteniamo $c = \frac{1}{a} - 1$.

In conclusione per $a = 0$ abbiamo la soluzione $x(t) = 0$ che è definita su tutto $\mathbf{R}$. Per $a = 1$ abbiamo $x(t) = \frac{1}{\cos t}$ che è definita su $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ e per $a = -1$ abbiamo $x(t) = \frac{1}{\cos t - 2}$ che è definita su tutto $\mathbf{R}$.

3. *Studiare il comportamento della serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{nx}{2n-1}\right)^n.$$

Soluzione. La serie di potenze è della forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

con $a_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n > 0$. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - 1/n} = \frac{1}{2}.$$

Dunque il raggio di convergenza della serie è 2 cioè la serie converge assolutamente per $|x| < 2$, converge uniformemente per $|x| <= 2 - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e non converge per $|x| > 2$.

Per quanto riguarda $|x| = 2$ si ha

$$|a_n x^n| = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}\right)^n > 1$$

cioè il termine generico della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge.