Compito di Analisi II/A

12 febbraio 1998

1. *Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

calcolandone anche la somma.

Soluzione.

Per $x = 0$ la serie converge e la sua somma è 0. Per $x \neq 0$, basta studiare la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$$

che converge per $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$, quindi per $x > 0$ oppure per $x < -2$, e la sua somma è

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{x}.$$

Riassumendo, la serie converge puntualmente per

$$x \in]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$$

e la sua somma è

$$f(x) = \begin{cases} x\frac{1+x}{x} = 1+x & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Essendo f discontinua in 0, la convergenza non può essere uniforme su $]-\infty, -2[\cup[0,+\infty[$. Invece, se $-\lambda < \frac{1}{1+x} < \lambda$ per un certo $\lambda \in]0,1[$, la serie geometrica converge totalmente e quindi uniformemente. Quindi la serie data converge uniformemente su

$$]-\infty, -2-\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

2. *Si risolva il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} u'(t) &= v(t) - u(t) \\ v'(t) &= u(t) - v(t) \end{cases}$$

con le condizioni $u(0) = 2$, $v(0) = 1$. (Traccia. Derivando la prima equazione del sistema, trasformare il sistema in un'equazione del secondo ordine).

Soluzione.

Dalla prima equazione si ricava

$$u'' = v' - u'$$

e quindi, utilizzando la seconda equazione,

$$u'' = u - v - u'.$$

Ricavando dalla prima equazione $v = u' + u$, si conclude che

$$u'' = u - u' - u - u' = -2u'$$

quindi

$$u'' + 2u' = 0.$$

Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

quindi $\lambda = 0$, $\lambda = -2$, per cui

$$u(t) = c_1 + c_2 e^{-2t}$$

e

$$v(t) = u'(t) + u(t) = -2c_2 e^{-2t} + c_1 + c_2 e^{-2t} = c_1 - c_2 e^{-2t}.$$

Ponendo $u(0) = 2$, $v(0) = 1$ si ha

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 - c_2 \end{cases}$$

quindi $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$. La soluzione cercata è:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ v(t) &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}. \end{aligned}$$

3. *Calcolare il valore massimo e il valore minimo della funzione*

$$f(x, y) = (x + y)e^{-xy}$$

sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

Soluzione.

Troviamo i punti critici

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy} - y(x + y)e^{-xy} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-xy} - x(x + y)e^{-xy} = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} e^{-xy}\big(1 - y(x + y)\big) = 0 \\ e^{-xy}\big(1 - x(x + y)\big) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava (essendo $e^{-xy} \neq 0$)

$$\begin{cases} y(x + y) = 1 \\ x(x + y) = 1 \end{cases}$$

e infine $x = y$ e $2x^2 = 1$, per cui i punti critici sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Di questi solo il primo sta nel triangolo dato.

Calcolando l'hessiano si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -ye^{-xy} - ye^{-xy} + y^2 e^{-xy}(x + y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -xe^{-xy} - (x + y)e^{-xy} - ye^{-xy} + xye^{-xy}(x + y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -xe^{-xy} - xe^{-xy} + x^2 e^{-xy}(x + y) \end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{H}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} & \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} \\ \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} & \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} & -\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-1/2} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-1/2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Poiché
$$det\mathcal{H}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{9}{2}e^{-1} = \frac{-4}{e} < 0$$
il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è di sella.

Studiamo allora f sulla frontiera di T che è data dai tre segmenti:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{x=0,\ 0\le y\le 2\} \\ \gamma_2 &= \{y=0,\ 0\le x\le 2\} \\ \gamma_3 &= \{y=2-x,\ 0\le x\le 2\}. \end{aligned}$$

Su γ_1 la funzione f vale
$$f(0,y) = \varphi_1(y) = y$$
quindi il massimo è 2 (nel punto $(0,2)$) e il minimo è 0 (nel punto $(0,0)$). Su γ_2 la funzione f vale
$$f(x,0) = \varphi_2(x) = x$$
e quindi il massimo è 2 (nel punto $(2,0)$) e il minimo è 0 (nel punto $(0,0)$). Su γ_3 la funzione vale

$$f(x,2-x) = \varphi_3(x) = 2e^{-x(2-x)} = 2e^{x^2-2x}$$

quindi
$$\varphi_3'(x) = 2e^{x^2-2x}(2x-2)$$
dunque $\varphi_3'(x)$ è negativo per $x<1$ ed è positivo per $x>1$. Dunque in questo caso il massimo è $\varphi_3(0)=\varphi_3(2)=2$ (nei punti $(2,0)$ e $(0,2)$) e il minimo è $\varphi(1)=\frac{2}{e}$.

Quindi il massimo di f è 2 e il minimo è 0.

4. *Dire se la funzione*
$$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$$
ha punti di massimo o minimo relativo. (Traccia. Si studi il segno di f attorno al punto $(0,0)$).

Soluzione.

Cerchiamo i punti critici:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y-2x^2+y-x^2 = 0 \end{cases}$$

quindi
$$\begin{cases} -6xy + 8x^3 = 0 \\ 2y-3x^2 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione si annulla se $x = 0$ oppure $y = \frac{4}{3}x^2$. Nel primo caso $y = 0$, nel secondo

$$\frac{8}{3}x^2 - 3x^2 = 0$$

e di nuovo $x = 0$ (e $y = 0$).

L'unico punto stazionario è quindi $(0,0)$. Calcoliamo l'hessiano:

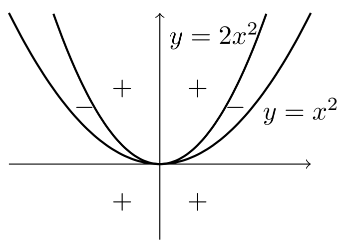
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6y + 24x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 \end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\det \mathcal{H}f(0,0) = 0$, quindi non si riesce a dire nulla per questa via.

Ma studiando il segno di f si trova che f è positiva se $y > 2x^2$ oppure se $y < x^2$. Quindi il segno di f è dato da



quindi vicino a $(0,0)$ vi sono sia punti in cui f è positiva, sia punti in cui f è negativa. Ne segue che $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo relativo e quindi f non ha alcun punto di massimo o minimo relativo.