# Compito di Analisi II/A

30 gennaio 1998

1. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' &= \sin^2(x-t) \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

*(Traccia: si operi la sostituzione $y(t) = x(t) - t$.)*

Soluzione. Con la sostituzione $y = x - t$ si ottiene $y' = x' - 1$ e quindi

$$y' = \sin^2 y - 1 = -\cos^2 y.$$

L'equazione è a variabili separabili e si risolve così:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\cos^2 y} &= -1 \\ \int \frac{y'}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}t &= \int -1\,\mathrm{d}t \\ \tan y &= -t + c \\ y &= \arctan(c - t) \end{aligned}$$

quindi

$$x(t) = t + y(t) = t + \arctan(c - t).$$

Ponendo la condizione $x(0) = 0$ si ottiene $c = 0$ e quindi la soluzione cercata è

$$x(t) = t - \arctan t.$$

2. *Si consideri la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \frac{1}{nx - x^n} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

*per $x \in [1/2, 1]$. Calcolare il limite di $(f_n)$ e dire se la convergenza è uniforme.*

Soluzione.

Fissato $x \in [1/2, 1[$, si ha

$$\begin{aligned} nx &\to +\infty \\ x^n &\to 0 \end{aligned}$$

dunque $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per $x \in [1/2, 1[$. Per $x = 1$ si ha $f_n(1) = \frac{1}{n-1}$ e dunque anche $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$. Ne segue che la successione $(f_n)$ converge a $f_\infty \equiv 0$ per ogni $x \in [1/2, 1]$.

Per verificare se la convergenza è uniforme, occorre calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1/2,1]} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1/2,1]} \frac{1}{nx - x^n}$$

in quanto $nx > x^n$ per ogni $x < \sqrt[n-1]{n}$ e quindi $f_n(x) > 0$ per ogni $x \in [1/2, 1]$. Poiché

$$f_n'(x) = \frac{-n + nx^{n-1}}{(nx - x^n)^2}$$

si ha che $f_n'(x) > 0$ se e solo se

$$nx^{n-1} > n$$

quindi per $x > 1$. Sull'intervallo $[1/2, 1]$ allora $f_n$ è decrescente e

$$\sup_{x\in[1/2,1]} f_n(x) = f_n(1/2) = \frac{1}{\frac{n}{2} - \frac{1}{2^n}}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1/2,1]} \frac{1}{nx - x^n} = 0$$

quindi la convergenza è uniforme.

3. *Calcolare il valore massimo e il valore minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$$

*sul cerchio* $C = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Soluzione.

Il gradiente di $f(x, y)$ è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

quindi i punti stazionari sono dati da

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases}$$

e sono $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, ambedue appartenenti a $C$. Calcolando l'hessiano si ha

$$\mathcal{H}f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $(1, 0)$ è di minimo relativo ($f(1, 0) = -2$), mentre

$$\mathcal{H}f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $(-1, 0)$ è di sella.

Passiamo ai punti della frontiera: $x^2 + y^2 = 4$. Si ha $y^2 = 4 - x^2$ e quindi basta studiare

$$\varphi(x) = x^3 + 4 - x^2 - 3x$$

per $x \in [-2, 2]$. Si ha

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

quindi

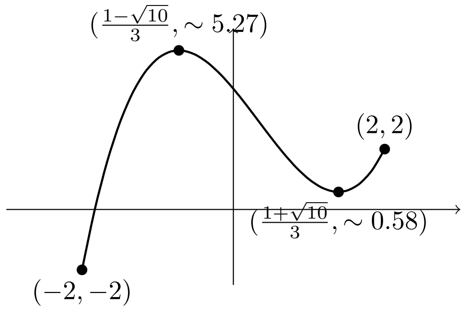
$$\varphi'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} = \begin{cases} \sim 1.39 \\ \sim -0.72 \end{cases}$$

Un grafico di $\varphi$ ha la forma

quindi $\max \varphi = \varphi(\frac{1-\sqrt{10}}{3}) =\sim 5.27$ e $\min \varphi = \varphi(-2) = -2$.

Ne segue che anche

$$\begin{aligned} \max f &= f\Big(\frac{1 - \sqrt{10}}{3}, 4 - \Big(\frac{1 - \sqrt{10}}{3}\Big)^2\Big) =\sim 5.27 \\ \min f &= f(1, 0) = f(-2, 0) = -2. \end{aligned}$$




4. *Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione*

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

*attorno a* $(0,0)$.

<u>Soluzione.</u>

Basta calcolare

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^x \cos y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^x \sin y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= e^x \cos y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -e^x \sin y
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \\
\nabla f(0,0) &= (0,1) \\
\mathcal{H} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e la formula di Taylor cercata è

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \big(\mathcal{H} f(0,0)(x,y)\big) \cdot (x,y) = y + xy + o(x^2+y^2).$$