

TEORIA ERGODICA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Anno Accademico 2012-13

Docente: Claudio Bonanno

per info: <http://users.dma.unipi.it/bonanno/>

La teoria ergodica è una branca della matematica, e in particolare della teoria dei sistemi dinamici, che si occupa di studiare principalmente le proprietà statistiche di un sistema dinamico.

Il termine “ergodico” fu introdotto da Boltzmann per indicare sistemi che assumevano tutti i possibili stati microscopici associati al loro stato macroscopico. Successivamente Gibbs diede al termine “ergodico” il significato che è oggi più conosciuto, formulando la cosiddetta “ipotesi ergodica” per un sistema dinamico: l’ipotesi che per una proprietà osservabile del sistema la media temporale calcolata lungo ogni orbita coincida con la media spaziale calcolata su tutti i possibili stati del sistema.

La formalizzazione matematica del concetto di “sistema ergodico” avvenne poi grazie ai primi risultati di Poincaré, Birkhoff e von Neumann: il teorema di ricorrenza e i risultati di convergenza in media e locale. In breve la teoria ergodica divenne argomento di crescente interesse, e si svilupparono numerosi collegamenti con altre branche della matematica, dall’analisi alla teoria della probabilità, dalla geometria differenziale alla teoria dei numeri. Inoltre, gli strumenti della teoria ergodica furono sviluppati anche allo scopo di dare una caratterizzazione formale di quei sistemi dinamici che presentavano forme di imprevedibilità delle orbite, sistemi che cominciarono a essere riconosciuti in molte branche per esempio della fisica e della biologia e che furono chiamati caotici. Il famoso “effetto farfalla” è una semplificazione del concetto formale di “dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali”, e rappresenta la caoticità dei sistemi meteorologici. Non a caso, uno dei primi esempi di sistema dinamico con dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali fu trovato da Edward Lorenz nel 1963 simulando numericamente l’evoluzione di un sistema dinamico costruito come modello dell’atmosfera terrestre, un fluido riscaldato dall’alto e raffreddato dal basso (in effetti fu proprio Lorenz a coniare il termine “effetto farfalla”).

Lo scopo di questo corso è di presentare la teoria ergodica partendo dai concetti base, come le misure invarianti, ingrediente fondamentale di un sistema dinamico che si voglia studiare con la teoria ergodica, e i teoremi ergodici di convergenza, per poi concentrarsi su due aspetti particolari: la teoria spettrale dell’operatore di trasferimento e il concetto di entropia. L’operatore di trasferimento è un operatore lineare che è associato a un sistema dinamico, e le sue proprietà spettrali sono utili per la caratterizzazione delle proprietà ergodiche di un sistema dinamico, ad esempio l’esistenza di misure invarianti assolutamente continue e il decadimento delle correlazioni, una forma di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Il concetto di entropia è invece uno dei principali concetti della teoria ergodica, introdotto nella teoria dei sistemi dinamici da Kolmogorov come misura quantitativa della “caoticità” presente in un sistema dinamico, in analogia con i concetti di entropia già esistenti nella meccanica statistica e nella teoria dell’informazione.

Nello svolgimento del corso presterò inoltre particolare attenzione all’analisi dei problemi che sorgono quando la misura invariante del sistema dinamico risulta essere non normalizzabile, ossia lo spazio delle fasi ha misura infinita. Molti risultati si potranno estendere a questo caso, ma nasceranno nuovi e curiosi fenomeni nello studio statistico delle proprietà delle orbite.

Infine, uno dei metodi migliori per comprendere i comportamenti statistici di un sistema dinamico è quello di avere un insieme di esempi che siano rappresentativi delle diverse possibilità. Ci saranno quindi alcuni esempi che ci accompagneranno per tutto lo svolgimento del corso e su cui si studieranno le proprietà e i risultati introdotti.

I prerequisiti per il corso sono le nozioni di base di teoria della misura e di analisi funzionale. Non sono richieste conoscenze particolari di teoria spettrale degli operatori né di teoria della probabilità.