

ELEMENTI DI MATEMATICA E STATISTICA

CLAUDIO BONANNO

INDICE

1. Notazioni	1
2. Insiemi numerici	1
3. Spazi vettoriali	4
4. Equazioni e sistemi lineari omogenei	8
5. Dimensione e base di uno spazio vettoriale	9
6. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali	13

1. NOTAZIONI

- $\in$ significa “appartiene a”
- $\forall$ significa “per ogni”;
- $\exists$ significa “esiste (almeno)”;
- $\exists!$ significa “esiste unico”;
- $:$ o *t.c.* significa “tale che”;
- $\Rightarrow$ significa “implica che”
- $\Leftrightarrow$ significa “se e solo se” o “è equivalente a”

2. INSIEMI NUMERICI

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei *numeri naturali*, e con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali a cui abbiamo aggiunto lo 0.

Proprietà di $\mathbb{N}_0$ rispetto all'operazione somma $+$. I numeri naturali è un insieme chiuso rispetto a $+$, ossia se $n, m \in \mathbb{N}$ allora $n + m \in \mathbb{N}$. Valgono le seguenti proprietà:

- esiste l'elemento neutro 0 (per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $n + 0 = n$);
- vale la proprietà associativa (per ogni $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, si ha $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$).

Non esiste però in generale l'elemento inverso di ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia un $m \in \mathbb{N}$ tale che $m + n = 0$.

Per questo motivo, consideriamo $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, l'insieme dei *numeri interi*.

Proprietà di $\mathbb{Z}$ rispetto all'operazione somma $+$. $\mathbb{Z}$ è un insieme chiuso rispetto a $+$. Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

- esiste l'elemento neutro 0;
- vale la proprietà associativa;
- esiste l'elemento inverso (per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste $-n \in \mathbb{Z}$ tale che $n + (-n) = 0$);
- vale la proprietà commutativa (per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$, si ha $n + m = m + n$).

Un insieme numerico con le proprietà (i), (ii) e (iii) rispetto ad un'operazione binaria si chiama *gruppo*. Se vale anche la (iv), si chiama *gruppo commutativo*. Pertanto $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

Consideriamo ora l'operazione di prodotto $\cdot$. $\mathbb{Z}$ è un insieme chiuso anche rispetto a $\cdot$. Inoltre, per $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ si ha:

- (v) esiste l'elemento neutro 1 per $\cdot$ (per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $n \cdot 1 = n$);
- (vi) vale la proprietà associativa del prodotto (per ogni $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, si ha $n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) = (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3$);
- (vii) vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma (per ogni $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, si ha $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$).

Non esiste però in generale l'elemento inverso rispetto al prodotto. Dato $n \in \mathbb{Z}$, non esiste necessariamente $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n \cdot m = 1$.

Per questo motivo, consideriamo $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$, l'insieme dei *numeri razionali*. Proprietà di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. $\mathbb{Q}$ è un insieme chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$. Inoltre, valgono le proprietà da (i) a (vii), e in più

- (viii) esiste l'elemento inverso rispetto al prodotto (per ogni $p/q \in \mathbb{Q}$ con $p \neq 0$, esiste $q/p \in \mathbb{Q}$ tale $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = +1$).
- (ix) vale la proprietà commutativa per il prodotto.

Pertanto $\mathbb{Q}$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

Inoltre, un insieme numerico con le proprietà da (i) a (ix) rispetto a due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ si chiama *campo*. Pertanto $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

Infine, osserviamo che rappresentando i numeri razionali su una retta, resterebbero dei “buchi”, come ad esempio le radici del polinomio a coefficienti interi $x^2 - 2$. Mostriamo infatti che

Proposizione 2.1. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, ossia supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, e ne ricaviamo qualcosa di assurdo.

Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \text{MCD}(p, q) = 1.$$

Da

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

segue

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2q^2 = p^2.$$

Pertanto p è pari. Possiamo dunque scrivere $p = 2p'$ con $p' \in \mathbb{N}$. Ne segue

$$2q^2 = (2p')^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2q^2 = 4(p')^2 \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = 2(p')^2.$$

Quindi anche q è pari, in contraddizione con $\text{MCD}(p, q) = 1$. Abbiamo ottenuto un assurdo. $\square$

Riempendo i “buchi” sulla retta lasciati da $\mathbb{Q}$, troviamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*, che è un campo rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.

Abbiamo quindi costruito la seguente gerarchia di insiemi numerici

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Passiamo adesso alla costruzione dei prodotti cartesiani $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.2 (Prodotto cartesiano). Siano A e B due insiemi. Il loro *prodotto cartesiano* è

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

In particolare,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

e analogamente si definiscono

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},$$

e $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con l'operazione di somma. Dati $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Valgono inoltre:

- l'esistenza dell'elemento neutro $(0, 0)$;
- la proprietà associativa;
- l'esistenza dell'elemento inverso rispetto alla somma:

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0);$$

- la proprietà commutativa.

Pertanto $(\mathbb{R}^2, +)$ e in generale $(\mathbb{R}^n, +)$ sono gruppi commutativi.

Partendo da $\mathbb{R}^2$ possiamo definire l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*. Introduciamo un simbolo i , che rappresenta un numero con la proprietà che $i^2 = -1$. Allora, un numero complesso è un numero della forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Possiamo pensare alla seguente identificazione

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \iff x + iy \in \mathbb{C}.$$

Su $\mathbb{C}$ possiamo anche introdurre il seguente prodotto

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

In termini di coppie, esso è quindi definito da

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Con le operazioni di somma e prodotto appena definite, $\mathbb{C}$ è un campo. Infatti, $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}^2$) è un gruppo commutativo rispetto a $+$, inoltre

- l'elemento neutro del prodotto è $(1, 0)$, poiché

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y);$$

- valgono le proprietà (vi) e (vii), associativa e distributiva;
- l'inverso di $(x, y) \neq (0, 0)$ è

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

poiché

$$\begin{aligned} (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right), x \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= (1, 0); \end{aligned}$$

- vale la proprietà commutativa per il prodotto.

3. SPAZI VETTORIALI

Un primo esempio è

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

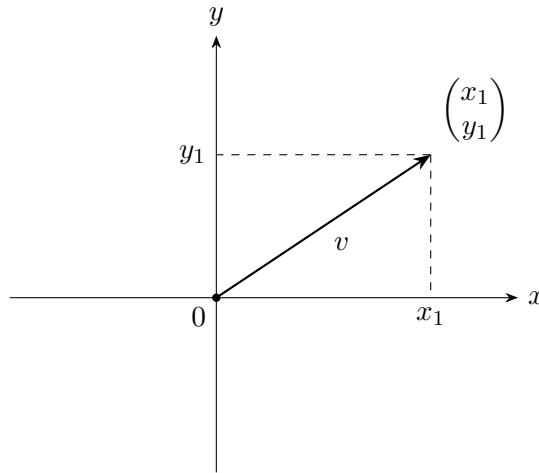
In particolare, usando adesso una notazione “verticale”,

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Gli elementi

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

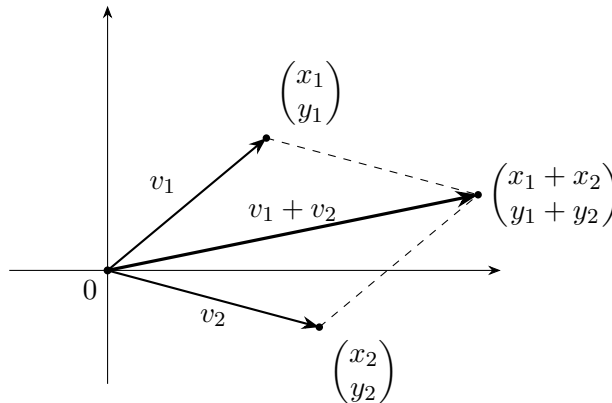
si chiamano *vettori*, mentre x e y sono le loro componenti.



L'operazione di somma tra i vettori di $\mathbb{R}^2$ è definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

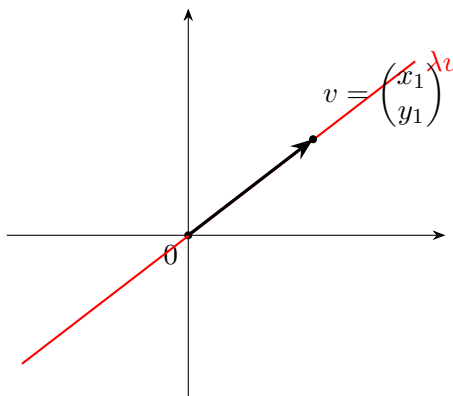
Geometricamente, la somma si rappresenta mediante la regola del parallelogramma.



Si definisce anche la *moltiplicazione per uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ dato un vettore v tramite

$$\lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Geometricamente, i multipli scalari di un vettore v giacciono sulla retta passante per l'origine e contenente v .



Valgono inoltre le proprietà

$$\begin{aligned}\lambda(v + w) &= \lambda v + \lambda w, & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2, \\ (\lambda + \mu)v &= \lambda v + \mu v, & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

e

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Le proprietà che abbiamo visto per il piano euclideo sono quelle che devono essere verificate da uno *spazio vettoriale reale*.

Definizione 3.1 (Spazio vettoriale reale). Uno *spazio vettoriale reale* è un insieme V , i cui elementi sono chiamati *vettori*, dotato di un'operazione di somma tra vettori e di un'operazione di moltiplicazione per scalari reali tali che

$$v + w \in V, \quad \forall v, w \in V,$$

e

$$\lambda v \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V.$$

Inoltre, $(V, +)$ deve essere un gruppo commutativo e devono valere le proprietà

(i)

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V;$$

(ii)

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in V;$$

(iii)

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V;$$

(iv)

$$1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V.$$

Esempi di spazi vettoriali euclidei.

Lo spazio $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale con elemento neutro

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e operazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Analogamente, $\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale con elemento neutro

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e operazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Più in generale, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite componente per componente.

Lo spazio vettoriale dei polinomi.

Indichiamo con

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : m \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, m \right\}$$

l'insieme dei polinomi a coefficienti reali. Tale insieme è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma tra polinomi e di moltiplicazione per uno scalare.

Il polinomio nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma. Ad esempio, se

$$p(x) = 3x^2 + 2x - 1, \quad 0(x) = 0,$$

allora $p(x) + 0(x) = p(x)$. L'inverso additivo di $p(x)$ è il polinomio

$$q(x) = -3x^2 - 2x + 1,$$

per il quale $p(x) + q(x) = 0$. La somma tra polinomi è associativa e commutativa.

Se

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda p(x) = (\lambda a_m) x^m + (\lambda a_{m-1}) x^{m-1} + \cdots + (\lambda a_1) x + \lambda a_0.$$

Con questa operazione valgono anche le proprietà (i)–(iv) della definizione di spazio vettoriale.

Lo spazio vettoriale delle matrici.

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, indichiamo con $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ l'insieme delle tabelle di $m \cdot n$ numeri reali organizzati in m righe e n colonne. I suoi elementi si chiamano *matrici reali* $m \times n$. Ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R}).$$

Una matrice $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ si indica anche con

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove a_{ij} è l'elemento che si trova nella riga i e nella colonna j . Nell'esempio precedente, $a_{21} = e^{-7}$ e $a_{13} = -5$.

Indichiamo con $A_1, \dots, A_m$ le righe di A e con $A^1, \dots, A^n$ le sue colonne. Per la matrice precedente,

$$A_1 = (2 \quad \sqrt{3} \quad -5), \quad A_2 = (e^{-7} \quad 0 \quad 1),$$

mentre

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-7} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.2. *Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma tra matrici e di moltiplicazione per uno scalare definite componente per componente.*

Precisamente, date $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ in $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$, la matrice

$$C = A + B = (c_{ij})$$

è definita da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 7 \\ 0 & e & 2 \end{pmatrix},$$

allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ e^{-7} & e & 3 \end{pmatrix}.$$

Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice

$$C = \lambda A = (c_{ij})$$

è definita da

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ad esempio, per la matrice A precedente e per $\lambda = -2$ si ha

$$-2A = \begin{pmatrix} -4 & -2\sqrt{3} & 10 \\ -2e^{-7} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.3 (Sottospazio vettoriale). Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \mathbb{R})$, un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un *sottospazio vettoriale* di V se valgono le seguenti proprietà:

- (i) $0 \in W$;
- (ii) per ogni $v_1, v_2 \in W$, si ha $v_1 + v_2 \in W$;
- (iii) per ogni $v \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $\lambda v \in W$.

Per ogni spazio vettoriale V , i sottoinsiemi $\{0\}$ e V sono sottospazi vettoriali di V .

Esempi di sottospazi vettoriali.

In $\mathbb{R}^2$, oltre a $\{0\}$ e a $\mathbb{R}^2$, sono sottospazi vettoriali tutte e sole le rette passanti per l'origine. Una retta che non passa per l'origine non è invece un sottospazio vettoriale, poiché non contiene il vettore nullo.

In $\mathbb{R}^3$, oltre a $\{0\}$ e a $\mathbb{R}^3$, sono sottospazi vettoriali le rette passanti per l'origine e i piani passanti per l'origine.

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ e fissiamo un polinomio

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0.$$

L'insieme

$$W = \{\lambda p(x) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Infatti:

- (i) $0 \in W$, poiché $0 = 0 \cdot p(x)$;
- (ii) se $v_1, v_2 \in W$, esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$v_1 = \lambda_1 p(x), \quad v_2 = \lambda_2 p(x),$$

e quindi

$$v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)p(x) \in W;$$

- (iii) se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $v = \mu p(x)$ per qualche $\mu \in \mathbb{R}$, e dunque

$$\lambda v = (\lambda \mu)p(x) \in W.$$

Non è invece un sottospazio vettoriale l'insieme

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p = 2\}.$$

Infatti, presi

$$p(x) = x^2 + x - 1, \quad q(x) = -x^2,$$

si ha $p, q \in W$, ma

$$p(x) + q(x) = x - 1 \notin W,$$

poiché $x - 1$ ha grado 1.

Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, è invece un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ l'insieme

$$\mathbb{R}_k[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq k\} \cup \{0\}.$$

Infine, nello spazio vettoriale $\mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$, l'insieme

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R}) : a_{13} = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale. Esso è formato dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R}.$$

4. EQUAZIONI E SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Un'equazione lineare omogenea in n variabili a coefficienti reali è un'equazione della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono le variabili e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti.

Ad esempio,

$$2x + y = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in due variabili,

$$x - 2y + 3z = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in tre variabili, mentre

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in quattro variabili.

Proposizione 4.1. *L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}.$$

Verifichiamo le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali.

Il vettore nullo appartiene a W , poiché

$$a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0.$$

Siano ora

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in W, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in W.$$

Allora

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0, \quad a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} a_1(v_1 + w_1) + \cdots + a_n(v_n + w_n) \\ = (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + (a_1w_1 + \cdots + a_nw_n) = 0, \end{aligned}$$

e quindi $v + w \in W$.

Infine, se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$a_1(\lambda v_1) + \cdots + a_n(\lambda v_n) = \lambda(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = 0,$$

da cui $\lambda v \in W$. □

Un *sistema lineare omogeneo di m equazioni in n variabili* a coefficienti reali è un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Le incognite sono $x_1, \dots, x_n$, mentre

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$$

è la matrice dei coefficienti.

Proposizione 4.2. *L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. L'insieme delle soluzioni del sistema è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni. Il vettore nullo risolve tutte le equazioni; inoltre, la somma di due soluzioni e il prodotto di una soluzione per uno scalare risolvono ancora simultaneamente tutte le equazioni. Si tratta quindi di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. □

Esempi.

L'equazione $y = 0$ è un'equazione lineare omogenea nelle due variabili x, y , con coefficienti $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$. Il suo insieme delle soluzioni è

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

ossia l'asse delle ascisse.

L'equazione

$$x + y - z = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in tre variabili. Il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$, diverso da $\{0\}$: geometricamente, è il piano passante per l'origine di equazione $z = x + y$.

5. DIMENSIONE E BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Definizione 5.1. Siano V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_k \in V$. Si chiama *sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_k$* , e si indica con

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k),$$

il sottospazio formato da tutte le loro combinazioni lineari, ossia

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Ad esempio,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

poiché

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo nuovamente il piano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}$$

e i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

I vettori v e w appartengono a W e non sono l'uno multiplo dell'altro. Le loro combinazioni lineari formano quindi un piano contenuto in W :

$$\text{Span}(v, w) = \{ \lambda_1 v + \lambda_2 w : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \subseteq W.$$

Poiché entrambi sono piani passanti per l'origine, si ha

$$W = \text{Span}(v, w).$$

Per verificare, ad esempio, se

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartiene a $W = \text{Span}(v, w)$, dobbiamo stabilire se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ciò equivale al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda otteniamo $\lambda_2 = -1$ e quindi $\lambda_1 = 2$. Questi valori soddisfano anche la terza equazione; pertanto

$$u = 2v - w$$

e dunque $u \in \text{Span}(v, w)$.

Dipendenza e indipendenza lineare.

Definizione 5.2. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$. I vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

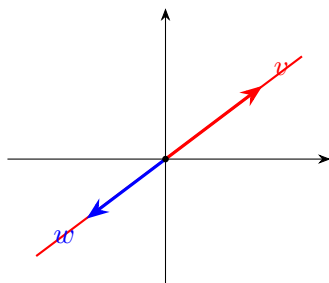
In caso contrario si dicono *linearmente indipendenti*; dunque $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

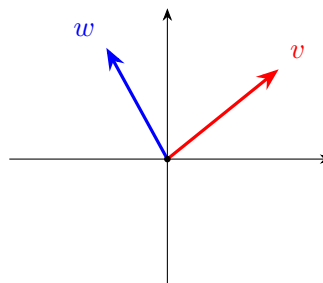
Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti, almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Infatti, se per esempio $\lambda_1 \neq 0$, allora

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}v_k.$$

In particolare, due vettori non nulli v_1, v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se uno è multiplo dell'altro, ossia se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v_1 = \lambda v_2$.



v, w linearmente dipendenti



v, w linearmente indipendenti

In $\mathbb{R}^3$, se v e w sono linearmente indipendenti, allora $\text{Span}(v, w)$ è un piano passante per l'origine. Un terzo vettore v_3 rende v, w, v_3 linearmente dipendenti se appartiene a tale piano e linearmente indipendenti se non vi appartiene.

Dimensione e basi.

Definizione 5.3. Uno spazio vettoriale V ha *dimensione* $d \in \mathbb{N}_0$ se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di d vettori linearmente indipendenti e non è possibile generare V con un numero minore di vettori. In tal caso si scrive

$$\dim V = d.$$

Ad esempio, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Infatti,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

poiché per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e i due vettori sono linearmente indipendenti. Analogamente,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

e i tre generatori sono linearmente indipendenti. Ogni retta passante per l'origine ha invece dimensione 1.

Definizione 5.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione d . Una *base* di V è un insieme di d vettori linearmente indipendenti che generano V .

I vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano la *base canonica* di $\mathbb{R}^2$, mentre

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 5.5. Sia $v_1, \dots, v_d$ una base di V . Per ogni $w \in V$, gli unici scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ tali che

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d$$

si chiamano *coordinate di w rispetto alla base $v_1, \dots, v_d$* .

Ad esempio, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

ha coordinate $(1, 2)$. Consideriamo invece la base

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate di v rispetto a questa base si determinano risolvendo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 2. \end{cases}$$

Si ottiene $\lambda_1 = 5/4$ e $\lambda_2 = 3/4$; pertanto

$$v = \frac{5}{4}w_1 + \frac{3}{4}w_2, \quad [v]_{(w_1, w_2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

La scelta della base non è unica. Ad esempio,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span}(e_1, e_2) = \text{Span}\left(e_1, e_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

ma il secondo insieme di generatori non è una base, perché contiene tre vettori ed è linearmente dipendente. Analogamente,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

e questi tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$: infatti, da

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

segue $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Dimensione dello spazio delle matrici.

Consideriamo lo spazio vettoriale $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Le matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formano una base. Infatti, ogni matrice si scrive nella forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22},$$

e questi quattro generatori sono linearmente indipendenti. Quindi

$$\dim M(2 \times 2, \mathbb{R}) = 4.$$

Più in generale, indicando con E_{ij} la matrice che ha 1 nella posizione (i, j) e 0 in tutte le altre posizioni, le mn matrici E_{ij} formano una base di $M(m \times n, \mathbb{R})$. Pertanto

$$\dim M(m \times n, \mathbb{R}) = mn.$$

6. SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

Definizione 6.1. Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V . Si chiama *intersezione* di U e W l'insieme

$$U \cap W = \{v \in V : v \in U \text{ e } v \in W\}.$$

Proposizione 6.2. L'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione. Poiché $0 \in U$ e $0 \in W$, si ha $0 \in U \cap W$. Se $v_1, v_2 \in U \cap W$, allora v_1, v_2 appartengono sia a U sia a W ; pertanto $v_1 + v_2 \in U \cap W$. Infine, se $v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λv appartiene sia a U sia a W , e dunque $\lambda v \in U \cap W$. $\square$

Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ consideriamo i piani

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Allora $\dim U = \dim W = 2$ e

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$$

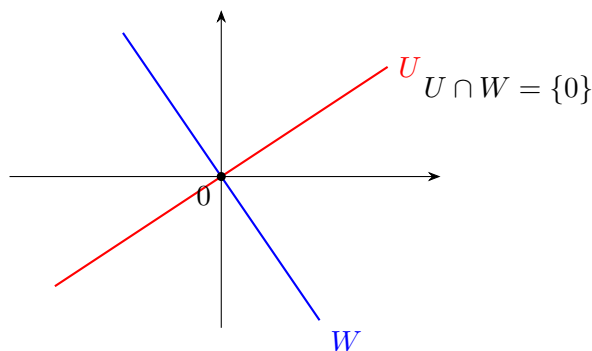
Risolvendo il sistema si trova

$$x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{3}{2}z,$$

e quindi

$$U \cap W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad \dim(U \cap W) = 1.$$

Geometricamente, due rette distinte passanti per l'origine in $\mathbb{R}^2$ si intersecano soltanto nell'origine.



Definizione 6.3. Siano U, W due sottospazi vettoriali di V . Si chiama *somma* di U e W l'insieme

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}.$$

Proposizione 6.4. La somma $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Se, ad esempio,

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

allora $\dim U = \dim W = 1$, $U \cap W = \{0\}$ e

$$U + W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2.$$

Teorema 6.5 (Formula di Grassmann). *Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora*

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Ad esempio, se U e W sono due piani di $\mathbb{R}^3$, entrambi di dimensione 2, allora:

- se $U + W = \mathbb{R}^3$, si ha $\dim(U \cap W) = 1$;
- se $U + W$ ha dimensione 2, si ha $\dim(U \cap W) = 2$, e quindi $U = W$.

Se invece $\dim U = 2$ e $\dim W = 1$ in $\mathbb{R}^3$, le sole possibilità sono

$\dim(U + W)$	$\dim(U \cap W)$
3	0
2	1.

La prima si verifica quando la retta W non è contenuta nel piano U ; la seconda quando $W \subseteq U$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI PISA, LARGO BRUNO PONTECORVO 5, 56127 PISA
Email address: `claudio.bonanno@unipi.it`