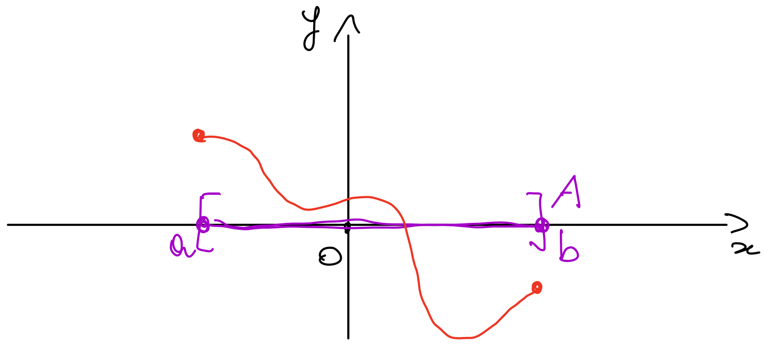
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D dom naturale

$x_0 \in D$, f è in continua in x_0 se $\begin{cases} x_0 \text{ isolato} \\ x_0 \in Acc(D) \text{ e } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Teorema Sia $A = [a,b] \subset D$ $(a, b \in \mathbb{R})$, f sia continua in A (cioè f è in continua in x_0, $\forall x_0 \in A$). Allora:

- (permanenza del segno) se $f(x_0) \underset{(<0)}{>0}$ con $x_0 \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) \underset{(<0)}{>0}$ $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$.
- (teorema degli zeri) se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$
- (teorema dei valori intermedi) se $f(a) \neq f(b)$, allora $\forall y \in (f(a), f(b))$ (opp. $y \in (f(b), f(a))$) $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = y$.
- (continuità dell'inversa) se f è invertibile in A allora f^{-1} è continua
- (teorema di Weierstrass) esistono il $\max_A f$ e il $\min_A f$.



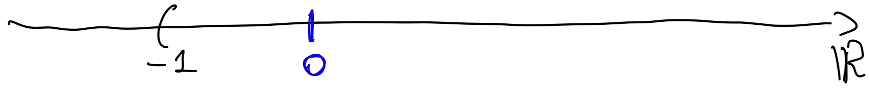
Def Sia $x_0 \in D$ in cui f non è continua $\left(\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\right)$.

Si dice che in x_0 c'è una discontinuità:

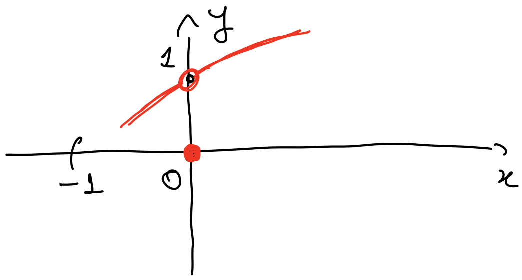
- eliminabile se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (ma $\ell \neq f(x_0)$)

(ES $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x}, & x \in \{x+1>0,\ x\neq 0\} = (-1,+\infty)\setminus\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$D = (-1, +\infty)$



$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$

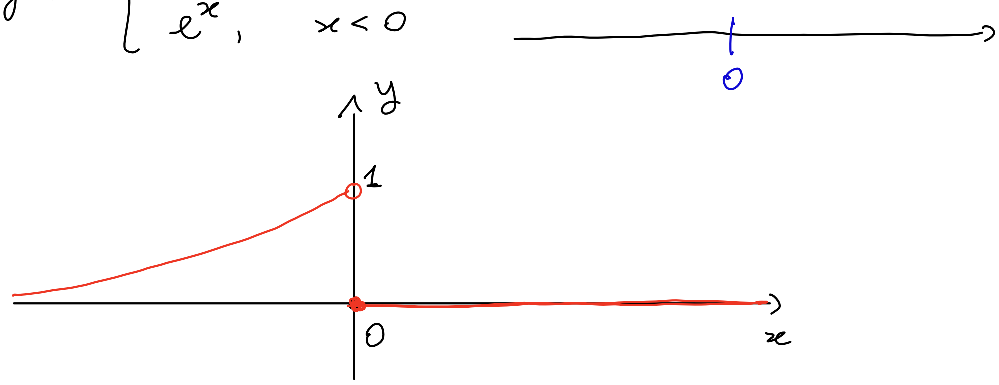


)

- di prima specie se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$

ma $\ell_1 \neq \ell_2$ ($\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$)

(ES $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ $D = \mathbb{R}$



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$

$\neq$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$)

- di seconda specie in tutti gli altri casi.

OSS - $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, non ha senso parlare di discontinuità in 0

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \ell, & x = 0 \end{cases}$ con $\ell \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$

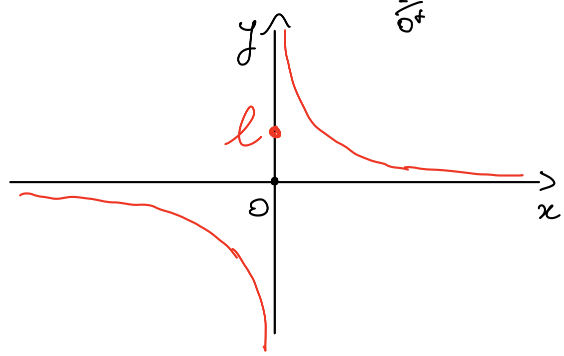
Esiste $\ell \in \mathbb{R}$ per cui f è continua in 0?

$\exists \lim_{x \to 0} f(x)$? $\exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$? NO

f ha una discontinuità di prima specie in 0? NO

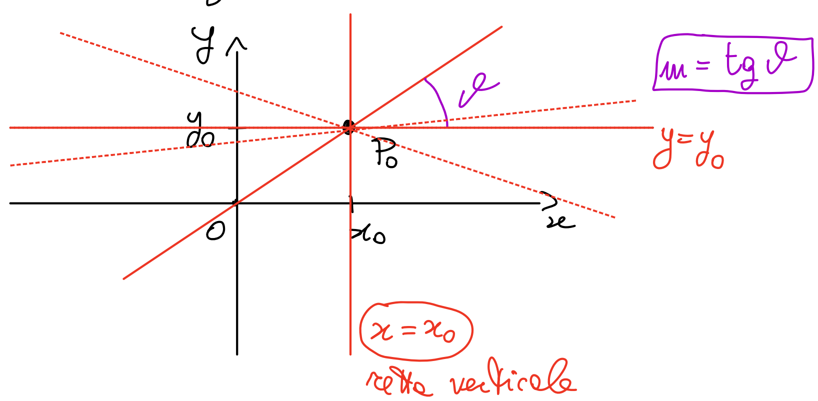
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\frac{1}{0^+}$



Derivate

Richiamo **Retta** Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, e un $m \in \mathbb{R}$ si chiama retta passante per P_0 di coefficiente angolare m l'insieme $y = y_0 + m(x - x_0)$.



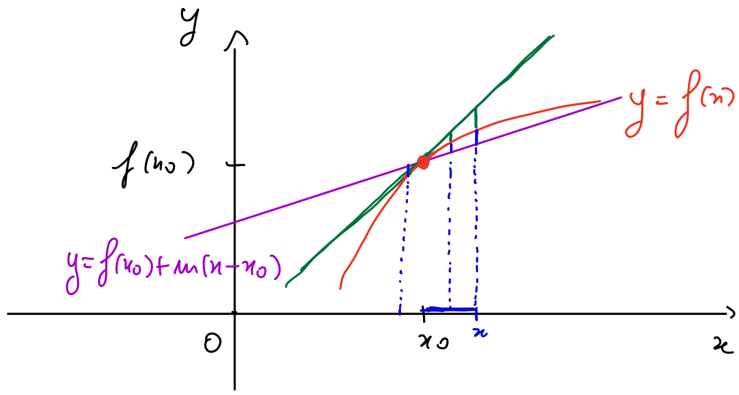
Oss Se $f(x) = m(x - a) + b$, $a, b, m \in \mathbb{R}$
il grafico di f è la retta passante per $P = (a, b)$ e coeff. angolare m.
$y = f(x) \iff y = b + m(x - a)$

Def Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D dom naturale, e sia $x_0 \in D$ (non estremo, ossia

$\exists\ \varepsilon>0$ tale che $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset D$). Si dice che esiste la retta tangente al grafico di f in $P=(x_0, f(x_0))$ se esiste $m\in\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]=0$,

e $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]}{x-x_0}=0$

$f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]= = o(x-x_0)$



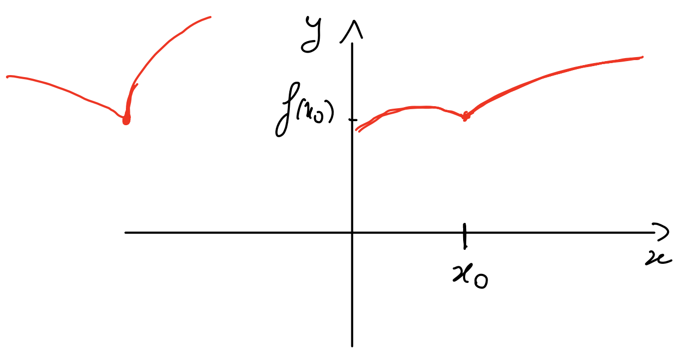
Se esiste la retta tangente al grafico di f in $P=(x_0, f(x_0))$ allora esiste $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m$, e viceversa.

Def Si dice che f è <u>derivabile in $x_0\in D$</u> se esiste $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$ e il valore del limite si indica con $f'(x_0)$ e si chiama derivata di f in x_0.

Prop Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

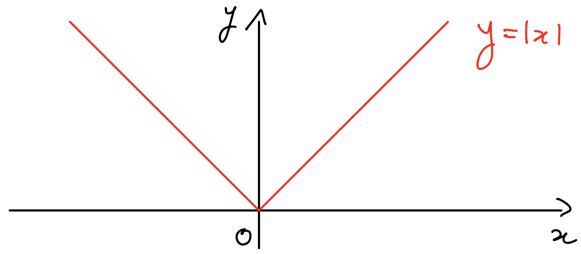
<u>Punti di non derivabilità</u> Sia $x_0\in D$, f sia continua in x_0,

- $\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e almeno uno dei due sia $\mathbb{R}$.



Punti angolosi

<u>ES</u> $f(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$



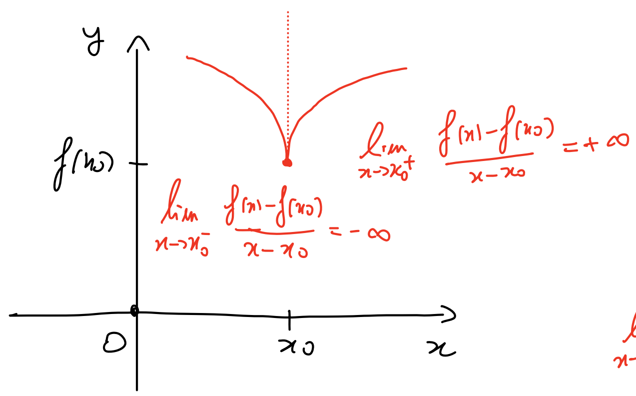
f non è derivabile in 0, in cui ha un punto angoloso

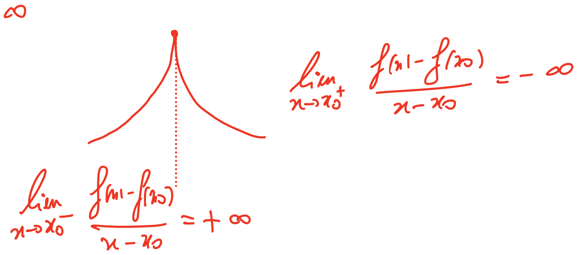
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)}{x} = -1$$

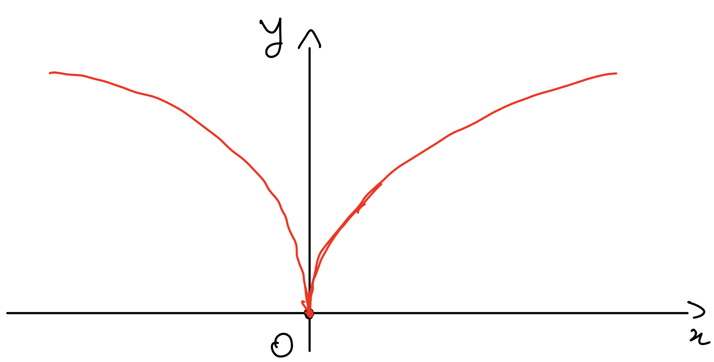
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e sono entrambi non reali (quindi uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$).

Cuspidi





<u>ES</u> $f(x) = \sqrt{|x|}$, $D = \{ |x| \geq 0 \} = \mathbb{R}$



f ha una cuspide in 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{1/0^+}{=} +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right) \overset{-\frac{1}{0^+}}{=} -\infty$$