**Esercizio** $f(x) = \log(|x^2-1|)$ , $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x^2-1| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

$\mathrm{Im}\, f = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, x \in D \text{ t.c. } y = f(x)\} = \mathbb{R}$

verifica: $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists\, x \in D$ t.c. $y = \log(|x^2-1|)$

$\Longleftrightarrow \quad |x^2-1| = e^y \quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1 = e^y \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-1<0 \\ 1-x^2 = e^y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ x = \pm\sqrt{e^y+1} \end{cases} \cup \begin{cases} x \in (-1,1) \\ x = \pm\sqrt{1-e^y} \end{cases}$$

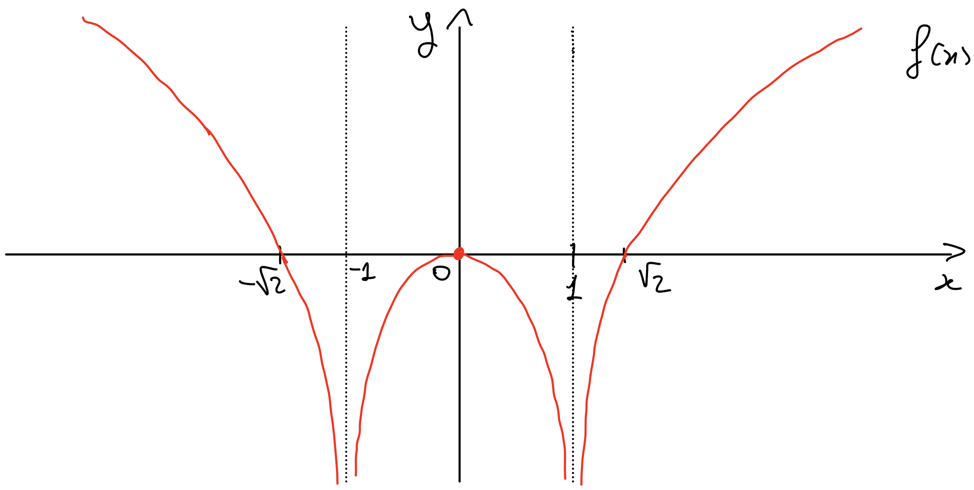
$\forall y \in \mathbb{R}$ $\qquad\qquad e^y \le 1 \Longleftrightarrow y \le 0$

$\forall y \in (0,+\infty)$ , $y = \log(|x^2-1|) \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{e^y+1}$

$\forall y \in (-\infty, 0]$ , $y = \log(|x^2-1|) \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{e^y+1}$ , $x = \pm\sqrt{1-e^y}$

$\Downarrow$

$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists\, x \in D$ t.c $y = \log(|x^2-1|)$




$f(x)$ PARI $(f(-x) = f(x))$

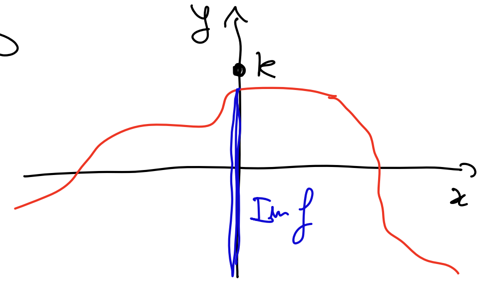
$\forall x \in (0,1) \quad |x^2-1| = 1-x^2 \in (0,1)$

---

**Def** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con dominio naturale $D$, si dice che:

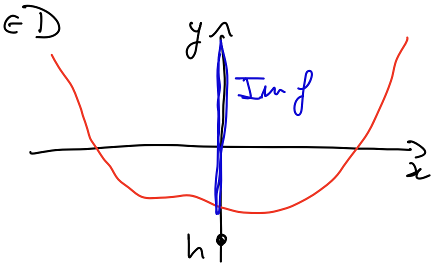
- $f$ è LIMITATA SUPERIORMENTE se ( $\mathrm{Im}\, f$ è limitata superiormente)

$\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq k \quad \forall x \in D$




- $f$ è LIMITATA INFERIORMENTE se (Im $f$ è limitata inferiormente)

$\exists\, h \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq h \quad \forall x \in D$




- $f$ è LIMITATA se è limitata superiormente ed inferiormente.
- l'ESTREMO SUPERIORE di $f$, $\sup f$, è (l'estremo superiore di Im $f$)

$$\sup f = \begin{cases} \text{minimo di } \{k \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq k \ \forall x \in D\}, & \text{se } f \text{ è limitata superiormente} \\ +\infty & \text{, altrimenti} \end{cases}$$

- l'ESTREMO INFERIORE di $f$, $\inf f$, è (l'estremo inferiore di Im $f$)

$$\inf f = \begin{cases} \text{massimo di } \{h \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq h \ \forall x \in D\}, & \text{se } f \text{ è limitata inferiormente} \\ -\infty & \text{, altrimenti} \end{cases}$$

- $f$ ha MASSIMO GLOBALE se (Im $f$ ha massimo) $\sup f \in \text{Im} f$

ossia $\exists\, x \in D$ tale che $f(x) = \sup f$.

In questo caso $\max f = \sup f$, e $x$ si chiama punto di massimo globale

- $f$ ha MINIMO GLOBALE se (Im $f$ ha minimo) $\inf f \in \text{Im} f$

ossia $\exists\, x \in D$ tale che $f(x) = \inf f$.

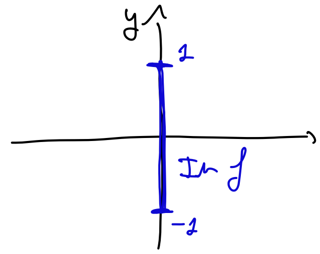
In questo caso $\min f = \inf f$, e $x$ si chiama punto di minimo globale

<u>OSS</u> Se $A \subseteq D$ dominio naturale, si può parlare di:

- $f$ limitata sup. in $A$, limitata inf in $A$
- $\sup\limits_A f$, $\inf\limits_A f$, $\max\limits_A f$, $\min\limits_A f$

Esempi

- $f(x) = \sin x$, $D = \mathbb{R}$, $\text{Im} f = [-1, 1]$




è limitata, $\sup f = 1$, $\inf f = -1$,

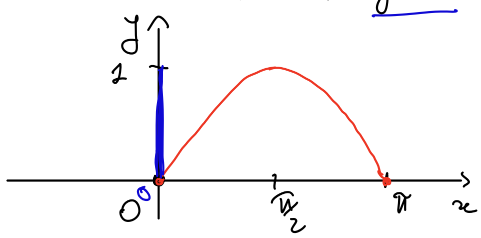
$\sup f = 1 \in \text{Im} f \Rightarrow f$ ha max globale, $\max f = 1$.

$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$\inf f = -1 \in \text{Im} f \Rightarrow f$ ha min globale, $\min f = -1$

$f(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$A = [0, \pi]$, $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A$ tale che $y = f(x) \} = [0, 1]$



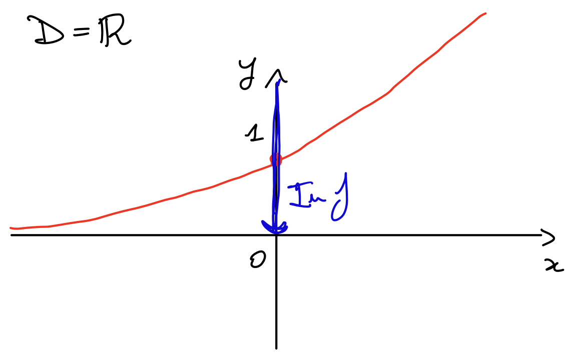

è limitata in A, $\sup_A f = 1$, $\inf_A f = 0$

$\max_A f = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\min_A f = 0$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

- $f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$

$\text{Im} f = (0, +\infty)$




$f$ è limitata sup? NO. Quindi $\sup f = +\infty$, non ammette massimo globale

$f$ è limitata inf? sì. $\text{Inf} f = 0$ ($\Leftarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \in D$), non ammette minimo globale (perché $f(x) > 0 \ \forall x \in D$, quindi $\nexists x \in D$ tale che $f(x) = 0$).

$A = (-\infty, 0)$. $f(A) = (0, 1)$

$f$ è limitata sup in A? sì. $\sup_A f = 1$. Non ammette massimo (perché $\nexists x \in A$ tale che $f(x) = 1$)

---

Def $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D$ dominio naturale. Si dice che:

- $f$ è POSITIVA se $f(x) > 0 \quad \forall x \in D \quad (\Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subseteq (0, +\infty))$.
- $f$ è NON NEGATIVA se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$
- $f$ è NEGATIVA se $f(x) < 0 \quad \forall x \in D \quad (\Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subseteq (-\infty, 0))$
- $f$ è NON POSITIVA se $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$.

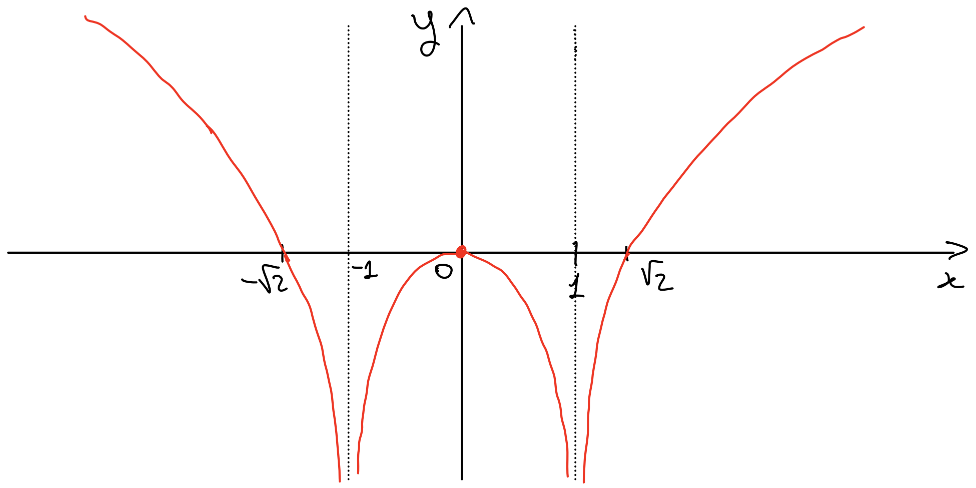
$\longleftrightarrow$

**Def** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D$ dominio naturale.

- $f$ è INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- $f$ è SURIETTIVA se $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.
- $f$ è BIGETTIVA se è iniettiva e suriettiva.

**OSS** Se $A \subseteq D$, $f$ si dice INIETTIVA in $A$ se
$\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esempio




$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

✓ $f$ non è iniettiva se $\exists\, y \in \mathrm{Im} f$ per cui $\exists\, x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ tale che
$y = f(x_1) = f(x_2)$.

✓ $f$ è surgettiva? sì. $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

✓ $\exists\, A \subseteq D$ t.c. $f$ è iniettiva in $A$? $A = (1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$
$(-1, 0]$, ...

---

**Def** Date $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Im} f \subseteq D_g$ dominio naturale di $g$, si definisce
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $D = D_f$ dominio naturale di $f$ che

$$D \ni x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)) \in \mathbb{R}.$$
$$\uparrow$$
$$\text{Im} f \in D_g$$

Posso prendere $D_{g\circ f} = \{ x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g \}$

<u>Es</u>

- $f(x) = \log x$, $g(x) = x^2+1$

  $D_f = (0,+\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

  $\text{Im} f = \mathbb{R}$, $\text{Im} g = [1,+\infty)$

  $\Rightarrow$ $(g\circ f)(x) = g(\log x) = 1 + (\log x)^2$

  $D = (0,+\infty)$

  $(f\circ g)(x) = f(x^2+1) = \log(x^2+1)$

  $D = \mathbb{R}$

- $f(x) = x^2-1$, $g(x) = \log x$

  $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = (0,+\infty)$

  $\text{Im} f = [-1,+\infty)$, $\text{Im} g = \mathbb{R}$

  $\Rightarrow (g\circ f)(x) = g(x^2-1) = \log(x^2-1)$

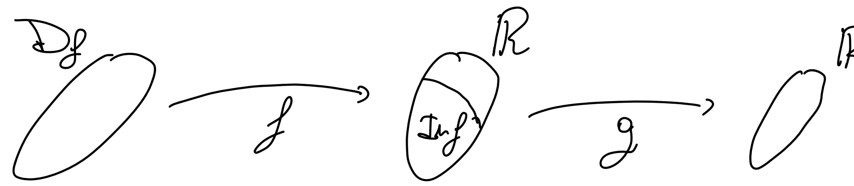
  $D = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in (0,+\infty) \}$

  $\Updownarrow$

  $x^2-1 > 0$

---

<u>Def</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D_f$ dominio naturale, $\text{Im} f$. Si dice che $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è <u>l'inversa di $f$</u> se $D_g = \text{Im} f$ e $(g\circ f)(x) = x$ $\forall x \in D_f$.




$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)) = x$$

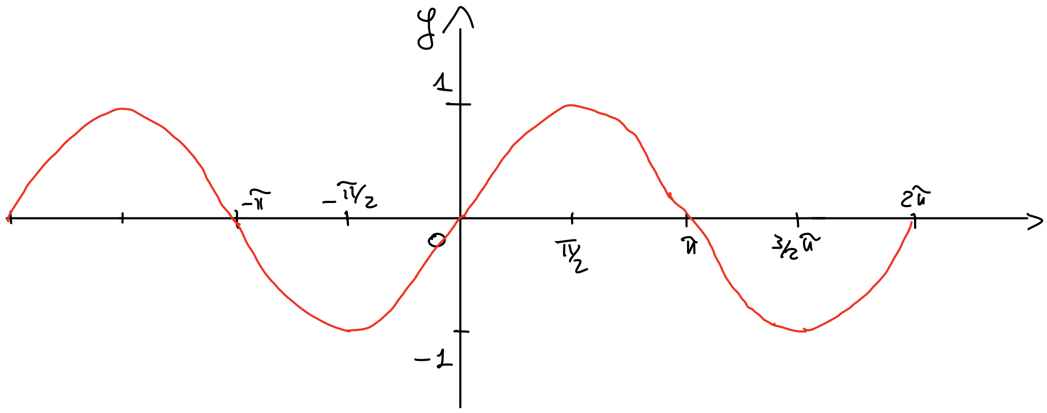
La funzione inversa di $f$ si indica con $f^{-1}$.

<u>PROP</u> Se $f$ non è iniettiva non ammette inversa ($\nexists f^{-1}$)
($\Leftrightarrow$ $f$ non è invertibile).

<u>Def</u> Sia $A \subset D_f$, $f$ si dice invertibile in $A$ se $f|_A$ ($f$ ristretta ad $A$) ammette inversa, ossia per $f: A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ esiste $g: f(A) \to \mathbb{R}$ t.c. $(g\circ f)(x) = x$ $\forall x \in A$. L'inversa di $f|_A$ si indica con $(f|_A)^{-1}$.

Esempi $\quad - \ f(x) = \sin x \ , \quad D = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Im}\, f = [-1, 1]$

$f$ non è iniettiva, quindi non invertibile.




$A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ , \quad f(A) = [-1, 1] \quad$ e $\quad f|_A$ è iniettiva

Quindi $\exists \ (f|_A)^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$.

$$\left(f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(y) = \text{arcoseno}\,(y)$$