$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$ serie storica, $u_i \in [a,b]$, N lunghezza

<u>Ipotesi</u> $\exists f : [a,b] \to [a,b]$, $\exists \mu$ f-invariante, ergodica, fisica

$u_j = f(u_{j-1})$ Se μ è di probabilità, calcoliamo $h_\mu(f)$

<u>Metodo AIC</u>

$\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_0^\varepsilon, \dots, P_{A-1}^\varepsilon\}$ in intervalli di lunghezza $\varepsilon > 0$

$$\underline{u} \longmapsto \omega(\underline{u}) \in \{0, \dots, A-1\}^N$$

$$\frac{|C(\omega(\underline{u}))|}{N} \sim h_\mu(f, \mathcal{P}_\varepsilon)$$

<u>Approximate Entropy</u>

Tolleranza $r > 0$ e dimensione $m \in \mathbb{N}$

$$x_i = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m-1})$$

$$\phi^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \Big(\log \underbrace{\frac{1}{N-m+1} \#\{j \,/\, d(x_j, x_i) < r\}}_{C_i^m(r)} \Big)$$

$$\lim_{r \to 0} \lim_{m \to +\infty} \lim_{N \to +\infty} \left[\phi^m(r) - \phi^{m+1}(r) \right] = h_\mu(f)$$

<u>Sistemi dinamici deterministici con perturbazioni random</u>

<u>Def</u> $(X, \mathcal{B})$, $f : X \to X$ sistema dinamico deterministico, $X \subseteq \mathbb{R}^d$

Per $\sigma > 0$, sia q^σ una densità di probabilità in $\mathbb{R}^d$.

La perturbazione random f_σ di (X, f) è una famiglia di catene di Markov t.c. $\forall B \in \mathcal{B}$ e $\forall x \in X$ si ha

$$P^\sigma(x, B) = \mathbb{P}\{f_\sigma(x) \in B\} = q^\sigma(B - f(x))$$

$$= \mathbb{P}\{f_\sigma^{m+1}(y) \in B \,/\, f_\sigma^m(y) = x\}$$

$$\longleftrightarrow$$

Serie storica deterministica con rumore dinamico

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$ è data da $u_1 \in [a,b]$, $\{\eta_j\}_{j=1,\dots,N-1}$ realizzazione di un processo stocastico di v.a. indip. e ident. dist. rispetto a q^σ, con

$$u_j = f(u_{j-1}) + \eta_{j-1} \,, \quad \forall j = 2, \dots, N.$$

Serie storica deterministica con rumore di output

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$ è data da $\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)$, $\{\eta_j\}_{j=1,\dots,N}$ realizzazione

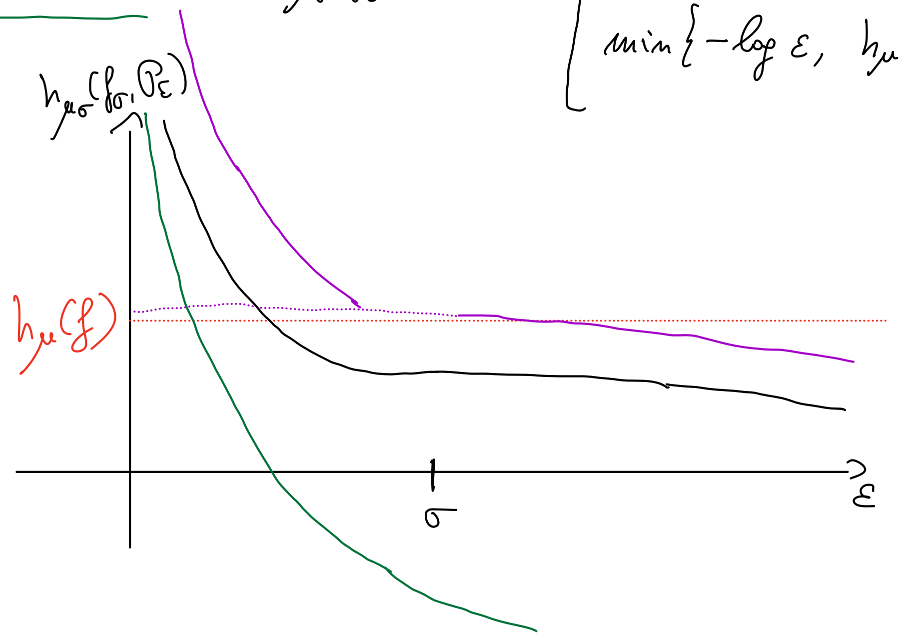
di un processo stocastico di v.a. indip. e ident. dist. rispetto a q^σ, con

$$\tilde{u}_j = f(\tilde{u}_{j-1}) \quad \forall j = 2, \dots, N \,, \qquad u_j = \tilde{u}_j + \eta_j \quad \forall j = 1, \dots, N$$

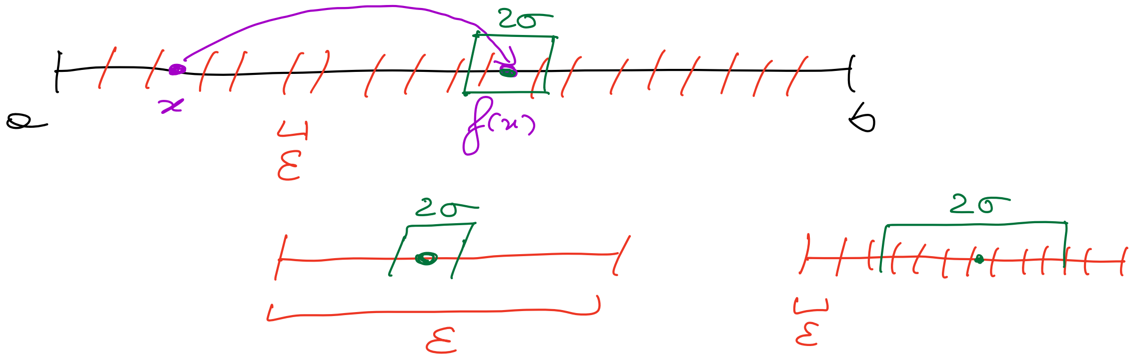
Risultati

Metodo AIC Supponendo che q^σ sia densità uniforme su $[-\sigma, \sigma]$,

$$-\log \varepsilon - \text{cost} \le h_{\mu_\sigma}(f_\sigma, \mathcal{P}_\varepsilon) \le \begin{cases} h_\mu(f, \mathcal{P}_\varepsilon) + 2 \log 2 \,, & \text{se } \varepsilon \gg \sigma \\ \min\{-\log \varepsilon,\ h_\mu(f, \mathcal{P}_\varepsilon) + 2 \log(2\sigma)\} \,, & \text{se } \varepsilon \ll \sigma \end{cases}$$



C. B., "The algorithmic information content for randomly perturbed systems", Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B vol 4 (2004), 921–936



Approximate entropy

$$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$$

Fissiamo $m = 1$ e una tolleranza $r > 0$.

$$\phi^1(r) - \phi^2(r) = \text{Media su } i \in \{1, \dots, N-1\} \text{ di}$$

$$-\log \mathrm{Prob}\{ |u_{j+1} - u_{i+1}| < r \mid |u_j - u_i| < r \}$$

Teorema Sia ψ_σ la densità della v.a. $H - H$ (H v.a. con densità g^σ) allora $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ApEn}(\underline{u}, m, r) \sim -\log [2 \psi_\sigma(0) r] \quad \text{per } r \to 0^+.$$

Algoritmo: $r \longmapsto \mathrm{ApEn}(\underline{u}, m, r)$

$\bar{r}$ che realizza $\min_r \left[\frac{d}{dr} \mathrm{ApEn}(\underline{u}, m, r) - \frac{d}{dr}(-\log r) \right]$

vicino a $\bar{r}$, fit $\mathrm{ApEn}(\underline{u}, m, r)$ con $-\log r + \text{cost}$

la costante restituisce $-\log(2 \psi_\sigma(0))$.

Esempio Se $H \sim N(0, \sigma^2)$ allora $\psi_\sigma(0) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$.

A. Scarciglia, F. Gini, V. Catrambone, C.B., G. Valenza, "Estimation of dynamical noise power in unknown systems", IEEE Signal Processing Letters, vol 30 (2023), 234–238