Nonlinear Dynamical Systems and Complexity

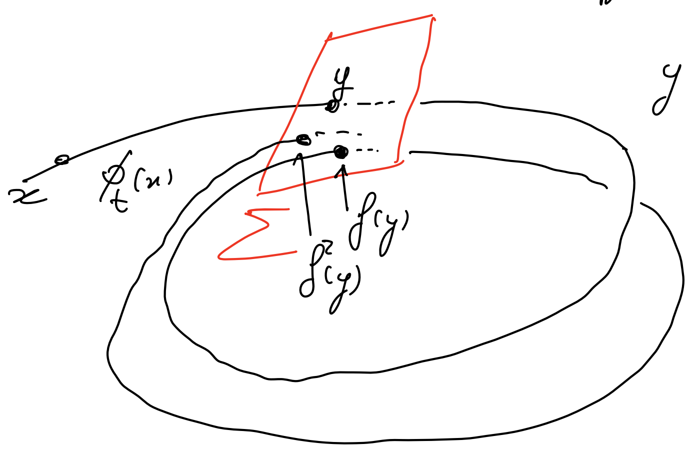
Kantz - Schreiber, "Nonlinear Time Series Analysis"

Sistemi dinamici discreti X insieme, $f: X \to X$

La dinamica è data da $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in X$,

$$f^n(x) := \underbrace{(f\circ f\circ f\circ\dots\circ f)}_{n\text{-volte}}(x)$$

Poincaré, fine 1800, introduce la mappa di Poincaré.

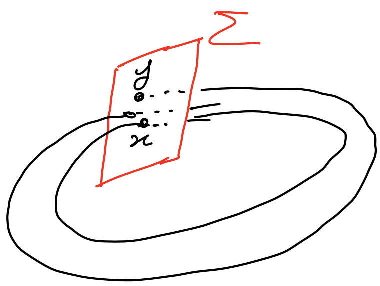


$y \longmapsto f(y)$

$f: \Sigma \to \Sigma$

Esempi

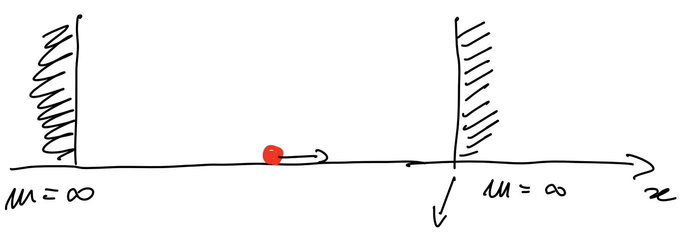
Ciclo



$f(x) = x$

f è ben definita su $U(x)$.

Oscillatori forzati   Ping pong di Fermi-Ulam



$\varphi(t)$ la posizione

$\{(t_n, v_n)\}$

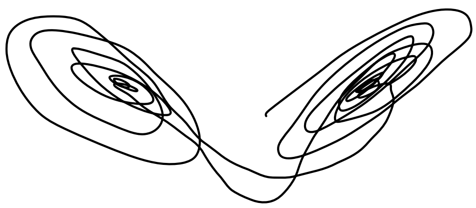
t_n = tempi di urto

v_n = velocità dopo l'urto

$$f: \mathbb{R} \times (0,+\infty) \circlearrowleft$$

Attrattore di Lorenz 1963

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \text{pol. di grado } 2 \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + \quad " \\ \dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + \quad " \end{cases}$$



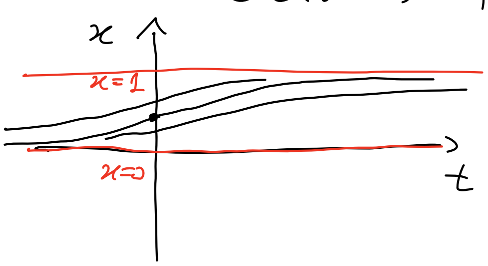
Esempi di sistemi dinamici discreti

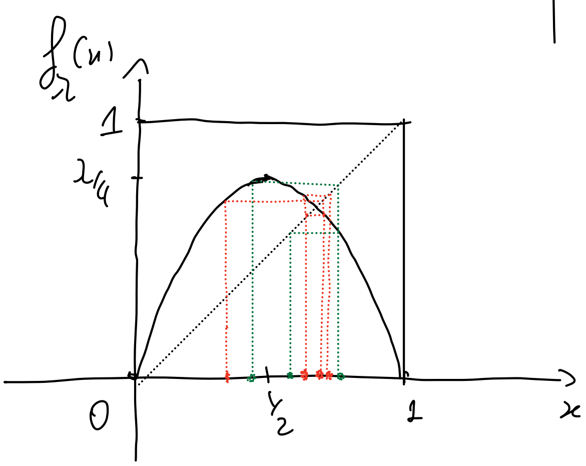
1. Mappa logistica

$$X = [0,1] \quad , \quad f: X \to X$$

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) \quad , \quad \lambda \in (0,4].$$

OSS Eq. logistica $\dot{x} = \lambda x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,+\infty)$





Def x_0 è punto fisso se $f(x_0) = x_0$

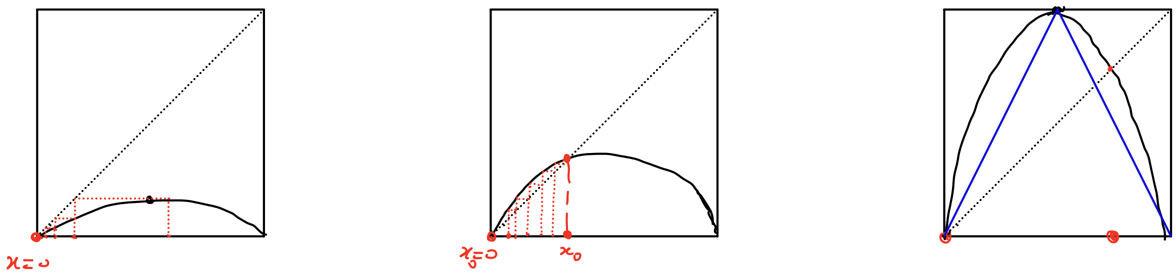
x_0 è periodico di periodo minimo $p \in \mathbb{N}$ se $f^p(x_0) = x_0$, e

$f^n(x_0) \neq x_0, \quad \forall n \in \{1, \dots, p-1\}.$

Sia $x \in [0,1]$, non fisso né periodico, asintotico ?

Def ω-limite di x $= \omega(x) := \{ y \in [0,1] \ / \ \exists\, n_k \nearrow +\infty \text{ t.c. } f^{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y \}$

Def Orbita di $x = \{ f^n(x) \}_{n \in \mathbb{N}}$



Def Un punto fisso x_0 è <u>attrattivo</u> se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
$\Rightarrow f^n(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $f^n(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

Un punto fisso x_0 è <u>repulsivo</u> se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
$\Rightarrow \exists\, \bar{n}$ t.c. $f^{\bar{n}}(y) \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Prop Se f è derivabile in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, x_0 è punto fisso, f' è continua in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, allora:

- $|f'(x_0)| < 1 \Rightarrow x_0$ è attrattivo
- $|f'(x_0)| > 1 \Rightarrow x_0$ è repulsivo

Prop Se $\lambda = 4$, $\exists$ infiniti punti periodici e sono tutti repulsivi.

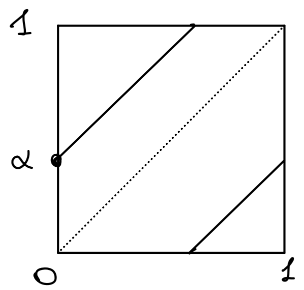
Se x non è fisso o periodico (o pre-periodico), $\omega(x) = [0,1]$.

2. Rotazioni del cerchio $S^1 = [0,1] /_{0 \sim 1} = \{ e^{2\pi i x}, x \in [0,1] \}$

$x \longmapsto f_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$

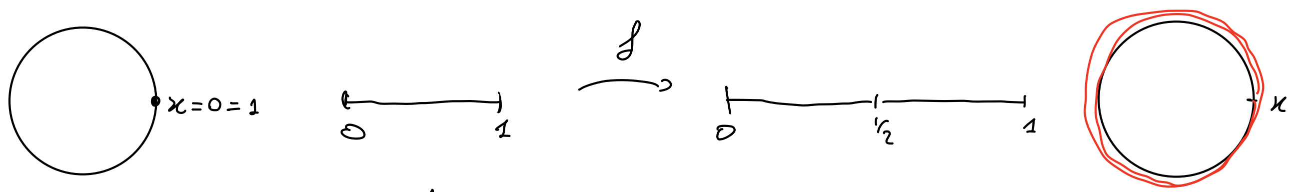
- $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ tutte le orbite sono periodiche

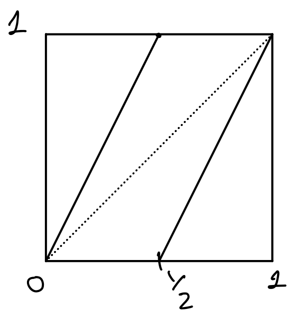
− $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ tutte le orbite sono dense $(\omega(x) = S^1, \forall x)$.



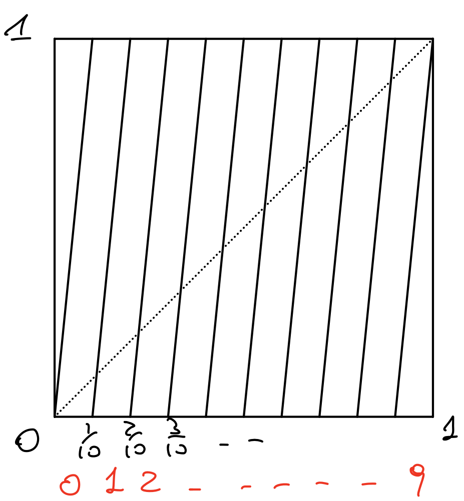
3. Endomorfismi lineari del cerchio, $S^1 = [0,1]/_{0\sim 1}$

$$x \longmapsto 2x \pmod 1$$





$$x \longmapsto 10x \pmod 1 = f(x)$$



$\pi - 3 = 0.14159\ldots$

$\pi - 3 \in \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right)$.

$f(\pi - 3) \in \left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right)$

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots \iff f^n(x) \in \left(\frac{x_{n+1}}{10}, \frac{x_{n+1}+1}{10}\right)$$

$$a \in \{0,1,\ldots,9\}, \quad \lim_{N \to +\infty} \frac{\#\{x_k = a \,/\, k = 1,\ldots,N\}}{N} \overset{?}{=} \frac{1}{10}$$

Def (Devaney) $f: X \to X$ è caotico se:

(i) esistono infinite orbite periodiche;

(ii) esiste un'orbita densa;

(iii) il sistema ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali
($\exists\, c>0$ t.c. $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, y \in B_\varepsilon(x)$ per cui
$\exists\, \bar{n}$ t.c. $d(f^{\bar{n}}(x), f^{\bar{n}}(y)) > c$).

OSS (ii) $\Longleftrightarrow$ $\exists\, x_0 \in X$ t.c. $\forall y \in X$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \bar{n}$ t.c. $f^{\bar{n}}(x_0) \in B_\varepsilon(y)$.

(ii) $\Longrightarrow$ $\forall\, U, V$ aperti in X, $\exists\, \bar{n}$ t.c. $f^{n}(U) \cap V \neq \emptyset$

Esempio

4. Dinamica Simbolica

$\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ alfabeto di N lettere

$\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0} = \{ \omega = (\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \dots) \,/\, \omega_i \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \}$

distanza su Ω

$$d(\omega, \tilde{\omega}) = 2^{-H(\omega, \tilde{\omega})} \quad \text{dove}$$
$$H(\omega, \tilde{\omega}) = \min\{ i \in \mathbb{N}_0 \,/\, \omega_i \neq \tilde{\omega}_i \}$$

$\sigma: \Omega \to \Omega$ SHIFT, continua

$$\omega = (\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \dots) \longmapsto \sigma\omega = (\underset{(\sigma\omega)_0}{\underset{\shortparallel}{\omega_1}}\, \underset{(\sigma\omega)_1}{\underset{\shortparallel}{\omega_2}} \dots)$$

$$(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1} \quad \forall i \geq 0.$$

Sistema dinamico (Ω, σ) Full shift

Prop Full shift è caotico (nel senso di Devaney)

dim (i) Punti fissi $= \{ \omega = (\overline{a}) \,/\, a \in \mathcal{A} \}$

Punti periodici $= \{ \omega = (\overline{s_0 s_1 \ldots s_{p-1}}) \,/\, s_0 \ldots s_{p-1} \in \mathcal{A}^p, \, p \in \mathbb{N} \}$

(ii) L'orbita di $\omega = \{ \sigma^n \omega \}_{n \in \mathbb{N}}$ è densa $\Longleftrightarrow$

$\forall \tilde{\omega} \in \Omega \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $d(\sigma^{\bar{n}} \omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \tilde{\omega} \in \Omega \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $H(\sigma^{\bar{n}} \omega, \tilde{\omega}) > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

ω si costruisce scrivendo

$$\omega = (\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_ \cdots \_}_{\mathcal{A}} \,|\, \underbrace{\_\,\_ \cdots \_}_{\mathcal{A}^2} \,|\, \cdots \,|\, \underbrace{\_ \cdots \_}_{\mathcal{A}^k} \,|\, \cdots)$$

(iii) $c = \frac{2}{3}$ $\quad \forall \omega \in \Omega, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{\omega}$ t.c. $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$

per cui $\exists \bar{n}$ t.c. $\underbrace{d(\sigma^{\bar{n}} \omega, \sigma^{\bar{n}} \tilde{\omega}) > c}_{\Uparrow}$.

$(\sigma^{\bar{n}} \omega)_0 \neq (\sigma^{\bar{n}} \tilde{\omega})_0$

È vero se $\forall \omega \in \Omega, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{\omega}$ t.c. $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$

per cui $\exists \bar{n}$ t.c. $(\sigma^{\bar{n}} \omega)_0 \neq (\sigma^{\bar{n}} \tilde{\omega})_0$

$\Updownarrow$

È vero se $\forall \omega \in \Omega, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{\omega}$ t.c. $H(\omega, \tilde{\omega}) > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

per cui $\exists \bar{n}$ t.c. $(\sigma^{\bar{n}} \omega)_0 \neq (\sigma^{\bar{n}} \tilde{\omega})_0$

$$\begin{array}{l} \omega = (\omega_0 \; \cdots\cdots \; \omega_{H(\omega,\tilde{\omega})} \; \omega_{H(\omega,\tilde{\omega})+1} \cdots) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq \\ \tilde{\omega} = (\; '' \;\; '' \;\; '' \;\; '' \;\; '' \;\; \tilde{\omega}_{H(\omega,\tilde{\omega})+1} \cdots) \end{array}$$

$\square$

Def Entropia topologica

Fissato $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, diciamo che $S \subset X$ è <u>(n, ε)-separato</u> se $\forall x, y \in S$, $x \neq y$ vale che $d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$ $\forall k = 0, \dots, n$.

$$h_{top}(f) := \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\max \# \{ S \ (n, \varepsilon)\text{-separato} \} \right)$$

Def f è <u>caotica</u> se $h_{top}(f) > 0$

Prop Sia $\mathcal{A}$ con N simboli, allora con $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$

$$h_{top}(\Omega, \sigma) = \log N.$$

dim $\omega, \tilde{\omega}$, $d(\sigma^k \omega, \sigma^k \tilde{\omega}) > \varepsilon$ $\forall k = 0, \dots, n$

$$H(\sigma^k \omega, \sigma^k \tilde{\omega}) > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall k = 0, \dots, n$$

$$\max \# \{ S \ (n, \varepsilon)\text{-separato} \} \simeq (\# \mathcal{A})^{n + \mathrm{cost}(\varepsilon)}$$

$$h_{top}(\Omega, \sigma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg[\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log (\# \mathcal{A})^{n + \mathrm{cost}(\varepsilon)}}_{= \log(\# \mathcal{A})} \Bigg]$$

$\square$