- Test sulla media di un campione di v.a. di Bernoulli

$$X_1, \dots, X_n \quad , \quad X_k \sim B(1, p) \quad , \quad E[X_k] = p$$

$$\overline{X} = \hat{p}$$

Test bilatero

$$\mathcal{H}_0) \ p = p_0 \in (0,1) \quad , \quad \mathcal{H}_1) \ p \neq p_0$$

Fissato un livello $\alpha \in (0,1)$, la regione critica

è $C = \{ |\overline{X} - p_0| > d \}$ con $d > 0$, cerchiamo d t.c.

$$\mathbb{P}_{p_0}(C) = \alpha$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right) \quad \underline{\text{test approssimato}}$$

$$\mathbb{P}_{p_0}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} d\right) \approx \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} d\right) =$$

dove $Z \sim N(0,1)$

$$= 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} d\right)\right] = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad d = \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{C = \left\{ |\overline{X} - p_0| > \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right\}}$$

Utilizzo dei dati $x_1, \dots, x_n$

- L'ipotesi è accettata al livello $\alpha \iff$

$$\iff \boxed{|\bar{x} - p_0| \le \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha/2}}$$

- p-value

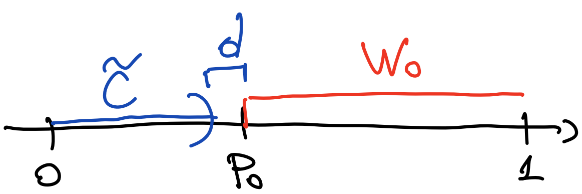
$$\boxed{\bar{\alpha} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\, |\bar{x} - p_0|\right)\right]}$$

- Test unilateri (approssimato)

$$H_0)\ p \ge p_0\,, \qquad H_1)\ p < p_0$$

Fissato il livello $\alpha \in (0,1)$, cerchiamo una regione critica $C = \{\bar{X} - p_0 < -d\}$ con $d > 0$,

t.c. $\mathbb{P}_p(C) \le \alpha \quad \forall\, p \ge p_0$.

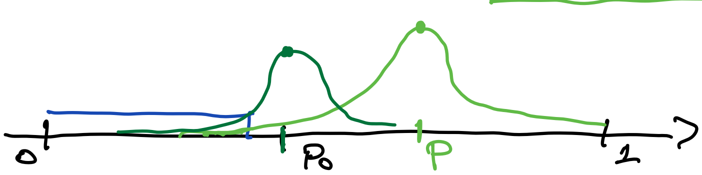


<u>OSS</u> Dato $p \ge p_0$,

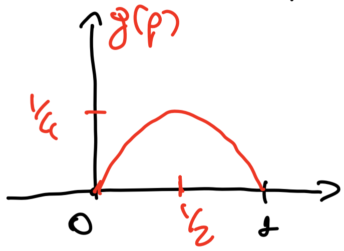
$$\mathbb{P}_p(\bar{X} < p_0 - d) \overset{?}{\le} \mathbb{P}_{p_0}(\bar{X} < p_0 - d)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\bar{X} \approx \underbrace{N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)} \qquad \bar{X} \approx N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$



Se $p_0 \ge \frac{1}{2}$, $\quad p \ge p_0 \implies p(1-p) \le p_0(1-p_0)$



$g(p) = p(1-p)$

Se $p_0 \ge \frac{1}{2}$, cerchiamo $d > 0$ t.c. $\mathbb{P}_{p_0}\left(\bar{X} - p_0 < -d\right) = \alpha$

$$\alpha = \mathbb{P}_{p_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\bar{X} - p_0) < -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\, d \right) \approx \mathbb{P}\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\, d \right)$$

$Z \sim N(0,1)$

$$= \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\, d \right)$$

$$\iff \quad d = -\frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\, q_\alpha \quad \left(= \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha} \right)$$

$$\boxed{C = \left\{ \bar{X} - p_0 < \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\, q_\alpha \right\}}$$

Utilizzo dei dati $x_1, \dots, x_n$ $\quad (\bar{x} = \hat{p})$

- L'ipotesi è accettata al livello α $\iff$

$$\boxed{\bar{x} - p_0 \ge \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\, q_\alpha}$$

- p-value $\quad \boxed{\bar{\alpha} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\bar{x} - p_0) \right)}$

$H_0)\ p \le p_0 \le \frac{1}{2}$, $H_1)\ p > p_0$

Regione critica al livello α è

$$\boxed{C = \left\{ \bar{X} - p_0 > \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \right\}}$$

L'ipotesi è accettata al livello $\alpha \Leftrightarrow$

$$\boxed{\bar{x} - p_0 \le \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}}$$

p-value $$\boxed{\bar{\alpha} = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} (\bar{x} - p_0) \right)}$$

Esempio Un modello di lampadine viene venduto con vita media di 200 ore. Proviamo 100 lampadine, e troviamo che 83 durano almeno 200 ore.

(a) È plausibile che una lampadina abbia il 90% di probabilità di durare almeno 200 ore?

$X_1, \dots, X_{100}$, $X_k \sim B(1,p)$ $\quad \hat{p} = \bar{x} = \frac{83}{100} = 0.83$

$H_0)\ p = 0.9 \qquad H_1)\ p \neq 0.9$

p-value $\bar{\alpha} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} |\bar{x} - p_0| \right)\right] =$

$$= 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1}} |0.83 - 0.9| \right)\right] \sim$$

$$\sim 2\left[1-\Phi(2.33)\right] \sim 0.0198$$ molto poco plausibile

(b) L'ipotesi $p = 0.9$ è accettabile al livello del 2%?

$$\alpha = 0.02 > \bar{\alpha} = 0.0198$$ NO

(c) È plausibile che una lampadina duri almeno 200 ore con una prob. non inferiore all' 84%?

$$H_0)\ p \geq 0.84 \qquad H_1)\ p < 0.84$$

p-value $$\bar{\alpha} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\bar{x}-p_0)\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{0.84 \cdot 0.16}}(0.83-0.84)\right) \sim$$

$$\sim \Phi(-0.273) \approx 0.39$$

molto plausibile

- $\boxed{\text{Confronto tra le medie di campioni gaussiani}}$

OSS Supponiamo di avere due campioni, $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_n$, accoppiati. In alcune situazioni è possibile supporre che $Z_i = X_i - Y_i \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2)$ dove $\mu_X = E[X_i]$, $\mu_Y = E[Y_i]$, e $Z_1, \dots, Z_n$ indip.
Il test sull' ipotesi nulla $\mu_X \geq \mu_Y + 7$, lo

scrivo come $\mu_X - \mu_Y \geq 7 \iff \mu_Z \geq 7$. Applico il Test sulle medie di un campione gaussiano con varianza ignota $\sigma = \sigma(Z)$

$$C = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{S} (\bar{Z} - \mu_0) < t_{(\alpha, n-1)} \right\}$$

$$S(\omega) = \bar{\sigma} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2 \right)^{1/2}$$

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \quad , \quad \bar{\sigma}(z) \neq \bar{\sigma}(x) + \bar{\sigma}(y).$$

$X_1, \dots, X_n \ , \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

indipendenti.

$Y_1, \dots, Y_k \ , \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Test è su $\mu_X - \mu_Y$

<u>Prop</u> Se $\sigma_X = \sigma_Y$ allora la v.a.

$$T_{n,k} := \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(n-1) S_X^2 + (k-1) S_Y^2}} \cdot \frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}$$

ha densità di Student a $(n+k-2)$ gradi di libertà.

- Test bilatero $\quad \mathcal{H}_0)\ \mu_X = \mu_Y \ , \quad \mathcal{H}_1)\ \mu_X \neq \mu_Y$

$\mu_X - \mu_Y = 0$

$\mathbb{P}_{\mu_X = \mu_Y}(C) = \alpha$ si ottiene con C della forma

$$C = \{ |T_{m,k}| > d \}$$

ha prob. α se $\mu_x = \mu_y$ quando $d = \tau_{(1-\alpha/2,\, m+k-2)}$

$$\boxed{C = \{ |T_{m,k}| > \tau_{(1-\alpha/2,\, m+k-2)} \}}$$

L'ipotesi è accettata al livello α $\Leftrightarrow$

$$\boxed{t_{m,k} := \frac{\bar{x} - \bar{y} - 0}{\sqrt{(m-1)\,\bar{\sigma}_x^2 + (k-1)\,\bar{\sigma}_y^2}} \cdot \frac{\sqrt{m+k-2}}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{k}}} \leq \tau_{(1-\alpha/2,\, m+k-2)}}$$

p-value $\boxed{\bar{\alpha} = 2\left[1 - F_{m+k-2}(t_{m,k}) \right]}$

- Test unilatero $\quad H_0)\ \mu_x \geq \mu_y \quad H_1)\ \mu_x < \mu_y$

$\mu_x - \mu_y \geq 0$

Al livello α, $\boxed{C = \{ T_{m,k} < \tau_{(\alpha,\, m+k-2)} \}}$

L'ipotesi è accettata al livello α $\Leftrightarrow$

$$\boxed{t_{m,k} \geq \tau_{\alpha,\, m+k-2}}$$

p-value $\boxed{\bar{\alpha} = F_{m+k-2}(t_{m,k})}$

<u>Esempio</u> Un gruppo di 22 volontari viene sottoposto ad un test per la qualità di un farmaco.

10 volontari ricevono il farmaco
12 " " un placebo

I volontari curati con il farmaco guariscono dopo $\bar{x} = 6.45$ giorni in media, e con $\bar{\sigma}_X^2 = 0.581$.

I volontari che hanno ricevuto il placebo, guariscono dopo $\bar{y} = 7.125$ giorni in media, e con $\bar{\sigma}_Y^2 = 0.778$.

Possiamo concludere che statisticamente il farmaco sia efficace?

$X_1, \dots, X_{10}$ farmaco $\quad Y_1, \dots, Y_{12}$ placebo

$X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2) \qquad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ varianze uguali

Poniamo l'ipotesi nulla $H_0)\ \mu_X \geq \mu_Y$, $H_1)\ \mu_X < \mu_Y$

La plausibilità dell'ipotesi è misurata dal p-value

$$\bar{\alpha} = F_{n+k-2}(t_{n,k})$$

$$t_{n,k} = \frac{\bar{x} - \bar{y} - 0}{\sqrt{(n-1)\bar{\sigma}_x^2 + (k-1)\bar{\sigma}_y^2}} \frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}} =$$

$$= \frac{6.45 - 7.125 - 0}{\sqrt{9 \cdot 0.581 + 11 \cdot 0.778}} \frac{\sqrt{10+12-2}}{\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}} \sim -1.89873$$

$$\bar{\alpha} \sim F_{20}(-1.89873) \sim 0.036$$

l'ipotesi è da scartare.