- Test per la media di un campione di v.a. gaussiane con σ^2 nota.

- Test bilateri $\quad H_0)\ \mu = \mu_0 \quad , \quad H_1)\ \mu \neq \mu_0$

Preparazione del test

$$C = \{ \omega \in \Omega \ / \ |\bar{X} - \mu_0| > d \}$$

Scegliere $d > 0$ in modo da contrastare:

- l'errore di prima specie (rifiutare l'ipotesi che è verificata)

Fissiamo $\alpha \in (0,1)$ (livello del test)

t.c. $\quad \mathbb{P}_{\mu_0}(C) \leq \alpha$

- l'errore di seconda specie (accettare l'ipotesi che non è verificata)

Potenza del test $:= \mathbb{P}_\mu(C) \ , \ \mu \neq \mu_0$

deve essere alta.

Def $\quad \mathbb{R} \ni \mu \longmapsto \beta(\mu) := \mathbb{P}_\mu(A) \quad$ curva operativa

$$\boxed{C = \{ |\bar{X} - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \}}$$

$$\beta(\mu) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) + q_{1-\alpha/2}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) - q_{1-\alpha/2}\right)$$

Effettuare il test

L'ipotesi è accettata al livello $\alpha \iff \left(\omega \in A\right.$

$$\left. \iff |\overline{X}(\omega) - \mu_0| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}\right) \iff$$

$$\boxed{|\bar{x} - \mu_0| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}}$$

dove n = taglia del campione, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

P-value = il livello $\bar{\alpha}$ per cui se $\alpha < \bar{\alpha}$ l'ipotesi è accettata, se $\alpha > \bar{\alpha}$ non è accettata.

$$\boxed{\bar{\alpha} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x} - \mu_0|\right)\right]}$$

OSS

$$\alpha < \bar{\alpha} \implies |\bar{x} - \mu_0| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \iff \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0| \le q_{1-\alpha/2}$$

$$\implies \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| \ge \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0|\right) \ge \underbrace{\mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0| \ge q_{1-\alpha/2}\right)}_{\mathbb{P}_{\mu_0}(C) = \alpha}$$

$$\alpha > \bar{\alpha} \implies |\bar{x} - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \iff \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0| > q_{1-\alpha/2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0| \right) \leq \underbrace{\mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0| \geq q_{1-\alpha/2} \right)}_{\mathbb{P}_{\mu_0}(C)=\alpha}$$

Quindi $$\boxed{\bar{\alpha} = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0| \right)}$$

Se $\bar{\alpha}$ è "piccolo", $\bar{\alpha} < 0.1$, i dati sono statisticamente significativi, e l'ipotesi è molto poco plausibile (è da scartare).

Se $\bar{\alpha}$ è "grande", $\bar{\alpha} \geq 0.3$, l'ipotesi è da considerarsi molto plausibili (certamente non da scartare).

Esempio Pesiamo 1000 confezioni di caramelle con una bilancia che ha un errore $N(0,4)$. Il venditore sostiene che una confezione pesi 100 g.

(a) Se $\bar{x} = 100.2$ g, possiamo accettare l'ipotesi al livello del 5 %?

$X_1, \dots X_{1000}$, $X_k \sim N(\mu, 4)$, $\sigma = 2$.

$H_0)\ \mu = 100 \qquad H_1)\ \mu \neq 100$

$\alpha = 0.05$, $C = \left\{ |\bar{X} - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right\} =$

$= \left\{ |\bar{X} - 100| > \frac{2}{\sqrt{1000}} q_{0.975} \right\}$

L'ipotesi viene accettata al livello del 5% se e solo se

$$|\bar{x} - \mu_0| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \iff |\bar{x} - 100| \leq \frac{2}{\sqrt{1000}} q_{0.975}$$

$$\iff 0.2 \leq \frac{1}{5\sqrt{10}} 1.96 \qquad \underline{NO}$$

(b) L'ipotesi è plausibile?

p-value $\qquad \bar{\alpha} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x} - \mu_0|\right)\right] =$

$$= 2\left[1 - \Phi\left(\underbrace{\frac{\sqrt{1000}}{2}}_{3.162} 0.2\right)\right] \sim$$

$$\sim 2\left[1 - 0.9992\right] \sim 0.0016 \quad \text{molto piccolo}$$

L'ipotesi è da scartare.

(c) Formuliamo un'ipotesi molto plausibile.

Troviamo μ_0 t.c. $\bar{\alpha} \geq 0.3$

$$2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x} - \mu_0|\right)\right] \geq 0.3$$

$$\iff 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{2}|100.2 - \mu_0|\right)\right] \geq 0.3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{2}\,|100.2-\mu_0|\right) \le 0.85$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1000}}{2}\,|100.2-\mu_0| \le q_{0.85} \quad \Longleftarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu_0 \in \left[100.2 - \frac{2}{\sqrt{1000}}\, q_{0.85} \,,\; 100.2 + \frac{2}{\sqrt{1000}}\, q_{0.85}\right]$$

$$\mu_0 \in [\,100.1345,\; 100.2655\,]$$

(d) Quanto è probabile accettare l'ipotesi $\mu = \overset{\mu_0}{\overbrace{100}}$ al livello del $\underbrace{5\%}_{\alpha}$ se il peso reale è 100.15?

$$\mathbb{P}_{100.15}(A) = \mathbb{P}_{100.15}\left(|\overline{X} - 100| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha/2}\right) = \beta(100.15)$$

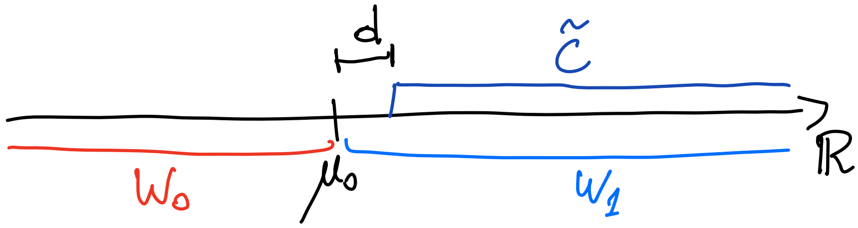
$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{2}(100-100.15) + q_{0.975}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{2}(100-100.15) - q_{0.975}\right)$$

~ 0.611 bassa.

- Test unilateri $\quad X_1,\dots,X_n,\; X_k \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ nota

$$\mathcal{H}_0)\ \mu \le \mu_0 \quad ; \quad \mathcal{H}_1)\ \mu > \mu_0$$

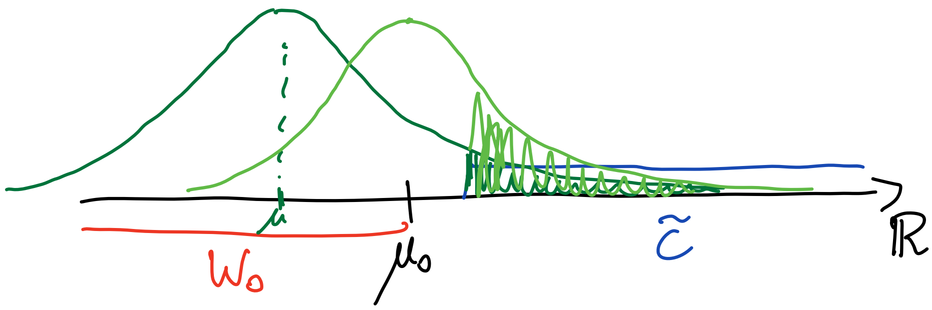
$\mu \in \mathbb{R}$



Fissato $\alpha \in (0,1)$, trovare $C = \{\overline{X} \in \tilde{C}\}$ t.c.

$$\mathbb{P}_\mu(C) \le \alpha \quad \forall \mu \le \mu_0 .$$

Cerchiamo $d>0$ t.c. $\mathbb{P}_\mu(\bar{X} - \mu_0 > d) \le \alpha \quad \forall \mu \le \mu_0$



Basta supporre che $\mathbb{P}_{\mu_0}(C) = \mathbb{P}_{\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 > d) \le \alpha$

Per il compromesso con l'errore di seconda specie, ci riconduciamo a cercare $d>0$ t.c. $\mathbb{P}_{\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 > d) = \alpha$.

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) \sim N(0,1)$ quindi

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 > d) = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) > \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d = q_{1-\alpha} \Longleftrightarrow d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} .$$

Per un test unilatero con ipotesi $\mu \le \mu_0$ per la media di un campione gaussiano con σ^2 nota, la regione critica al livello α è

$$\boxed{C = \left\{ \bar{X} - \mu_0 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \right\}}$$

Curve operativa

$$\mathbb{R} \ni \mu \longmapsto \beta(\mu) = \mathbb{P}_\mu(A) = \mathbb{P}_\mu\left(\overline{X} - \mu_0 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}-\mu) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) + q_{1-\alpha}\right) =$$

$$\boxed{\beta(\mu) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) + q_{1-\alpha}\right)}$$

Utilizziamo i dati. $(x_1, \dots, x_n)$

L'ipotesi $\mu \leq \mu_0$ è accettata al livello $\alpha \iff$

$$\boxed{\overline{x} - \mu_0 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}} \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

OSS L'ipotesi è accettata se $\mu_0 \in \left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}, +\infty\right)$

p-value

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha < \overline{\alpha} & \Rightarrow & \overline{x} - \mu_0 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \\ \alpha > \overline{\alpha} & \Rightarrow & \overline{x} - \mu_0 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \end{array}\right] \Rightarrow \overline{x} - \mu_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\overline{\alpha}}$$

$$\iff \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x}-\mu_0) = q_{1-\overline{\alpha}} \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x}-\mu_0)\right) = 1-\overline{\alpha}$$

$$\iff \boxed{\overline{\alpha} = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x}-\mu_0)\right)}$$

- Test unilatero (esercizio)

$$H_0)\ \mu \ge \mu_0 \quad , \quad H_1)\ \mu < \mu_0$$

Al livello α, $\boxed{C = \left\{ \overline{X} - \mu_0 < \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, q_\alpha}_{= -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}} \right\}}$

$$\boxed{\beta(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\mu_0 - \mu) + q_\alpha \right)}$$

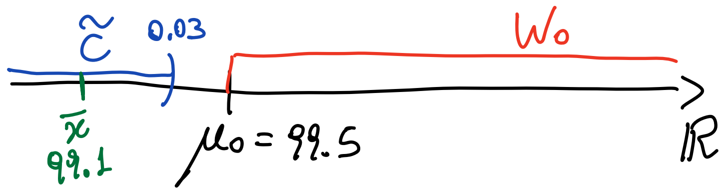
L'ipotesi è accettata al livello α $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\bar{x} - \mu_0 \ge \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, q_\alpha}$$

p-value $\boxed{\bar{\alpha} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{x} - \mu_0) \right)}$

Esempio: Pesiamo 1000 confezioni di caramelle con una bilancia con errore $N(0, 4)$.

(a) È accettabile al livello del 3% l'ipotesi che un pacchetto pesi almeno 99.5 g se $\bar{x} = 99.1$ g?



$$H_0)\ \mu \ge 99.5$$

$$H_1)\ \mu < 99.5$$

L'ipotesi è accettata al 3% $\Longleftrightarrow$ $\bar{x} - \mu_0 \ge \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, q_\alpha$

$\alpha = 0.03$

$\iff \bar{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_\alpha = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}$

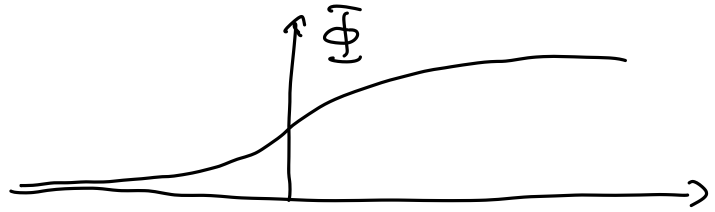
$\iff \bar{x} \geq \mu_0 - \frac{2}{\sqrt{1000}} q_{0.97} \iff 99.1 \overset{?}{\geq} 99.5 - \frac{2}{\sqrt{1000}} q_{0.97}$

$99.1 \overset{?}{\geq} 99.5 - 0.119 = 99.381$ NO

(b) p-value

$\bar{\alpha} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\mu_0)\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{2}(99.1-99.5)\right) \sim$

$\sim 1.3 \cdot 10^{-10}$



(c) Un'ipotesi con $\bar{\alpha} \geq 0.3$ per $\bar{x} = 99.1$ g

$n = 1000$, $\sigma = 2$,

$\bar{\alpha} \geq 0.3 \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\mu_0)\right) \geq 0.3$

$\iff \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{2}(99.1-\mu_0)\right) \geq 0.3$

$\iff \frac{\sqrt{1000}}{2}(99.1-\mu_0) \geq q_{0.3} = -q_{0.7}$

$\iff \mu_0 \leq 99.1 + \frac{2}{\sqrt{1000}} q_{0.7} \sim 99.133$