- Intervalli di fiducia per la media di un campione gaussiano con varianza nota.

$$X_1, \dots, X_n, \quad X_k \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma \text{ nota}$$

La costruzione di I al livello $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, equivale alla ricerca di $d > 0$ t.c.

- l'intervallo $[\bar{X}(\omega) - d, \bar{X}(\omega) + d]$ contiene μ con probabilità $1-\alpha$

- μ è contenuta in $[\bar{x} - d, \bar{x} + d]$ con una fiducia del $100 \cdot (1-\alpha)\%$.

$$1-\alpha = \mathbb{P}_\mu(|\bar{X} - \mu| < d) \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}}{=} \mathbb{P}_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu)\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\Big(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d < \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu)}_{N(0,1)} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\Big) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right)\right)$$

$$= 2\,\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) - 1$$

$$\iff 2\,\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) - 1 = 1 - \alpha \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\iff \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d = q_{1-\alpha/2} \iff d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$$

L'intervallo di fiducia bilatero per μ al livello $1-\alpha$ è

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \,,\, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right]$$

<u>Def</u> Si chiama PRECISIONE DELLA STIMA il valore $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$

Si chiama PRECISIONE RELATIVA il valore $\dfrac{\sigma/\sqrt{n}\, q_{1-\alpha/2}}{|\bar{x}|}$

<u>Esempio</u> Supponiamo di pesare 100 scatole di biscotti usando una bilancia che aggiunge al peso un errore gaussiano di tipo $N(0,\sigma^2)$ con $\sigma^2 = 0.1\ g$.

Se dai dati ricavo $\bar{x} = 500.01\ g$, qual è un intervallo di fiducia al livello del 95 % per il peso delle scatole?

$X_1, \dots, X_{100}$, $n = 100$, $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 0.1$

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$ $n = 100$, $\sigma = \sqrt{0.1}$

$$1-\alpha = 0.95 , \quad \alpha = 0.05 , \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$q_{0.975} \sim 1.96$$

$$I = [500.01 - 0.062 , 500.01 + 0.062] =$$

$$= [499.948 , 500.072]$$

Precisione stima $= 0.062$, Prec. relativa $= \frac{0.062}{500.01} \sim 10^{-4}$

$\longleftrightarrow$

Intervalli unilateri

destro $(\bar{X}(\omega) - d, +\infty)$

sinistro $(-\infty, \bar{X}(\omega) + d)$

Trovare $d > 0$ t.c.

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$1-\alpha = \mathbb{P}_\mu(\bar{X} - d < \mu) = \mathbb{P}_\mu(\bar{X} - \mu < d) \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right)$$

$$\iff \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d = q_{1-\alpha} \iff d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}$$

Int. unilatero destro $\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}, +\infty\right)$

sinistro $\left(-\infty, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\right]$

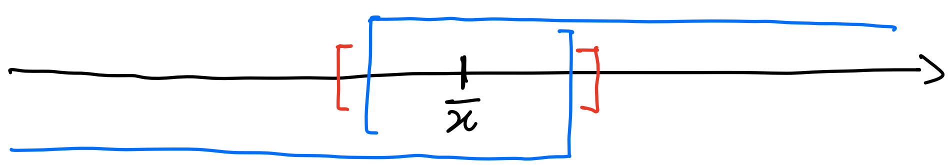
<u>Esempio</u> (continua) $\sigma = \sqrt{0.1}$, $n = 100$

$1-\alpha = 0.95$, $q_{0.95} \sim 1.645$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \sim 0.052$

Int. unilatero destro $[499.958, +\infty)$

sinistro $(-\infty, 500.062]$



<u>Esempio</u> Intervallo bilatero

Precisione della stima $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$

- n cresce $\Rightarrow$ prec. diminuisce (migliora)
- fiducia cresce $\Leftrightarrow$ $1-\alpha$ aumenta $\Leftrightarrow$ α diminuisce

  $\Leftrightarrow$ $1-\alpha/2$ cresce $\Rightarrow$ $q_{1-\alpha/2}$ cresce

  $\Rightarrow$ prec. aumenta (peggiora)

Per quale n si ottiene una prec. della stima di 10^{-2} con un livello di fiducia al 99%?

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} = 10^{-2} \qquad 1-\alpha = 0.99, \quad \alpha = 0.01$$
$$1-\alpha/2 = 0.995$$

$$\frac{\sqrt{0.1}}{\sqrt{n}} q_{0.995} = 10^{-2} \iff n = \left(\sqrt{0.1} \cdot q_{0.995} \cdot 10^2\right)^2$$

$$\iff n \sim \frac{1}{10}(2.575)^2 \, 10^4 \sim 6621.07$$

E al 90% $(1-\alpha = 0.9, \quad 1-\alpha/2 = 0.95)$

$$q_{0.95} \sim 1.645$$

$$\Rightarrow n = \left(\sqrt{0.1} \cdot 1.645 \cdot 10^2\right)^2 \sim 2702.13$$

- Con quale livello di fiducia la prec. della stima è 10^{-2} con $n = 100$?

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} = 10^{-2} \qquad \sigma = \sqrt{0.1}$$
$$n = 100$$

$$\frac{\sqrt{0.1}}{10} q_{1-\alpha/2} = 10^{-2} \iff q_{1-\alpha/2} = \frac{10^{-1}}{\sqrt{0.1}} \sim 0.316$$

$$\Phi(0.316) = 1-\alpha/2 \iff \alpha = 2\left(1-\Phi(0.316)\right)$$

$$\iff \alpha \sim 2(1-0.623) \sim 0.754$$

$$\Rightarrow \quad 1-\alpha \sim 0.246 \quad \text{Troppo basso.}$$

E se voglio $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} = 5 \cdot 10^{-2}$ con $n=100$?

$$\Rightarrow \quad 1-\alpha \sim 0.885$$

- Intervalli di fiducia per la media di un campione gaussiano con σ^2 ignota.

$X_1, \dots, X_n$, $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$, stima μ non conoscendo σ^2

Intervallo bilatero $\mu \in [\bar{x} - d, \bar{x} + d]$

Trovare $d > 0$ per cui $\mu \in [\bar{x} - d, \bar{x} + d]$ con fiducia di livello $1-\alpha$.

$$1-\alpha = \mathbb{P}_\mu\left(|\bar{X} - \mu| < d \right) = \mathbb{P}_\mu\left(\cancel{\left| \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) \right| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d} \right)$$

σ ignota

$$1-\alpha = \mathbb{P}_\mu\left(\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \right| < \tilde{d} \right) = \mathbb{P}_\mu\left(-\tilde{d} < T_{n-1} < \tilde{d} \right) =$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(-\tilde{d} < \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X}-\mu) < \tilde{d} \right) \quad \Bigg| \quad = F_{n-1}(\tilde{d}) - F_{n-1}(-\tilde{d})$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\bar X - \tilde d \frac{S}{\sqrt n} < \mu < \bar X + \tilde d \frac{S}{\sqrt n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\bar x - \tilde d \frac{\bar\sigma}{\sqrt n}\ ,\ \bar x + \tilde d \frac{\bar\sigma}{\sqrt n}\right]$$

$$= F_{n-1}(\tilde d) - \left(1 - F_{n-1}(\tilde d)\right)$$

$$= 2F_{n-1}(\tilde d) - 1$$

$$\Downarrow$$

$$2F_{n-1}(\tilde d) - 1 = 1 - \alpha$$

$$\tilde d = \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}$$

L'intervallo di fiducia bilatero per μ da un campione gaussiano con σ^2 ignota è

$$\left[\bar x - \frac{\bar\sigma}{\sqrt n}\tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}\ ,\ \bar x + \underbrace{\frac{\bar\sigma}{\sqrt n}\tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}}_{\text{prec. stima}}\right]$$

Intervallo unilatero destro $\left[\bar x - \frac{\bar\sigma}{\sqrt n}\tau_{(1-\alpha,\, n-1)}\ ,\ +\infty\right)$

sinistro $\left(-\infty\ ,\ \bar x + \frac{\bar\sigma}{\sqrt n}\tau_{(1-\alpha,\, n-1)}\right]$

OSS

Ross

$N(0,1)$ $\quad z_\alpha \longleftrightarrow q_{1-\alpha}$

T_n $\quad \tau_{(\alpha,n)} \longleftrightarrow \tau_{(1-\alpha,n)}$

Esempio Determinare un intervallo di fiducia al livello del 95 % per la frequenza cardiaca a riposo degli iscritti di una palestra, avendo come campione

54, 63, 58, 72, 49, 92, 70, 73, 69

104, 48, 66, 80, 64, 77

$X_1, \dots X_n$, $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$, $n = 15$

- Bilatero

$$\left[\bar{x} - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha/2, n-1)} , \bar{x} + \underbrace{\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha/2, n-1)}}_{\text{prec. stime}} \right]$$

$$\bar{x} = 69.267 , \quad \underset{\sqrt{S^2(\omega)}}{\overset{\shortparallel}{\bar{\sigma}}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 15.168$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)$$

$\tau_{(0.975, 14)} \sim 2.144787$ $\quad \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{15}} \tau_{(0.975, 14)} \sim 8.4$

2.1448

$$[69.267 - 8.4, 69.267 + 8.4] = [60.867, 77.667]$$

- Unilateri

$$\left[\bar{x} - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha, n-1)} , +\infty \right)$$

$$\left(-\infty , \bar{x} + \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha, n-1)} \right]$$

$$\frac{\bar{\sigma} \sim 15.168}{\sqrt{15}}$$

$\tau_{(0.95, 14)} \sim 1.7613$

1.76131