- $X \sim \Gamma(r, \lambda)$, $r>0$, $\lambda>0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{alt} \end{cases}$$

- $E[X] = \frac{r}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$

- $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$, $t \in (-\infty, \lambda)$

- $\underset{\text{indip.}}{\Gamma(r, \lambda) + \Gamma(s, \lambda)} \sim \Gamma(r+s, \lambda)$

<u>Def</u> Si chiama densità <u>chi-quadro a n gradi di libertà</u> la densità della v.a.

$C_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ dove $X_1, \dots, X_n$ sono v.a. indipendenti e $X_k \sim N(0,1)$ $\forall k = 1, \dots, n$

$C_n \sim \chi^2(n)$

<u>Prop</u> C_n ha densità $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In particolare

$$E[C_n] = n \quad , \quad Var(C_n) = 2n .$$

<u>dim</u> Sia $Z \sim N(0,1)$ allora Z^2 ha funzione

generatrice dei momenti data da

$$\varphi_{Z^2}(t) = E\left[e^{tZ^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz^2}\varphi(z)\,dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{z^2(t-\frac{1}{2})}\,dz < +\infty$$

se $t < \frac{1}{2}$

Ponendo $s = z\sqrt{1-2t}$ otteniamo

$$\varphi_{Z^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}(1-2t)}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{1-2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}, \quad t<\frac{1}{2}$$

$$\varphi_{Z^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{r}, \quad \lambda = r = \frac{1}{2}$$

quindi $Z^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Se $C_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$ con $X_k \sim N(0,1)$ indip,

allora $C_n \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. $\square$

Teorema Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. indip e $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(i) $\bar{X}$ e S^2 sono indipendenti.

(ii) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

<u>dim (ii)</u> $\overline{X}$ ok.

Poniamo $Y_k := X_k - \mu$ $\forall\, k = 1, \dots, n$. Allora

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} = \overline{X} - \mu .$$

Usando $\sum_{k=1}^{n} (Y_k - \overline{Y})^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - n\overline{Y}^2$ otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2 \iff$$

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2 \iff$$

indip. (i)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left[\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}\right]^2$$

$$X_k \sim N(\mu, \sigma^2) \Downarrow \frac{X_k - \mu}{\sigma} \sim N(0,1), \qquad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Downarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu) \sim N(0,1)$$

indip

$$C_n = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + C_1$$

$$\varphi_{C_n}(t) = \varphi_{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}(t) \cdot \varphi_{C_1}(t)$$

$$\Rightarrow \varphi_{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}(t) = \frac{\varphi_{C_n}(t)}{\varphi_{C_1}(t)} = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{n/2} \cdot \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 (n-1) \qquad \square$$

<u>Def</u> Il β-quantile di C_n si indica con $\chi^2_{(\beta, n)}$.

<u>Prop</u> • $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$ indip

allora $X + Y \sim \chi^2(n+m)$.

• $C_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$, $X_k^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \text{ in probabilità}$$

$$\frac{C_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(0,1) \text{ in distribuzione}$$

<u>Teorema</u> Siano $X_1, \dots X_n$ v.a. indip. e $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(iii) $\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu)}{S} \sim T_{n-1}$ (ha densità di Student a $n-1$ gradi di libertà)

<u>Def</u> Si chiama <u>densità di Student a n gradi di libertà</u> la densità della v.a.

- $T_n = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{C_n}{n}}}$ dove $X \sim N(0,1)$, $C_n \sim \chi^2(n)$ indip.

<u>OSS</u>

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{S} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)}{\frac{1}{\sigma}S} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}\frac{n-1}{n-1}}}$$

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) \rightarrow N(0,1)$ (ii)

$\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \rightarrow C_{n-1}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{C_{n-1}}{n-1}}} \sim T_{n-1}$$

<u>Esercizio</u> Densità di $\sqrt{\frac{C_n}{n}} = ?$

<u>Prop</u> Sia $T_n = \dfrac{X}{\sqrt{C_n/n}}$ con $X \sim N(0,1)$, $C_n \sim \chi^2(n)$ indip.

- La densità di T_n è una funzione pari, quindi se F_n è la sua funz. di ripartizione vale $F_n(-x) = 1 - F_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e se $\tau_{(\alpha,n)}$ indica il suo α-quantile si ha
$$\tau_{(1-\alpha,n)} = -\tau_{(\alpha,n)} \quad \forall \alpha \in (0,1).$$

- $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(0,1)$ in distribuzione

- I momenti $E[T_n^k] < +\infty$ per $k \leq n-1$.

ES $\quad E[T_n] = E\left[\frac{X}{\sqrt{C_n/n}}\right] = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E[X]}} \cdot E\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{C_n}{n}}}\right] = 0$

$$Var(T_n) = E[T_n^2] - E[T_n]^2 = E[T_n^2] =$$

$$= E\left[\frac{X^2}{C_n/n}\right] = E[X^2]\, E\left[\frac{n}{C_n}\right] =$$

$$= \Big(\underset{1}{\underset{\shortparallel}{Var(X)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E[X]^2}}\Big)\, E\left[\frac{n}{C_n}\right] = E\left[\frac{n}{C_n}\right] =$$

$$= n\, E\left[\frac{1}{C_n}\right] = \frac{n}{n-2}$$

$$C_n \sim \Gamma\left(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0 \\ 0, & \text{alt} \end{cases}$$

$$E\left[\frac{1}{C_n}\right] = \underset{g(x)=\frac{1}{x}}{E[g(C_n)]} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx = \frac{1}{n-2}$$

Stima parametrica

Campione statistico $X_1, \dots, X_n$ [v.a. indipendenti ed equidistribuite], con legge del campione data da una funz. di ripartizione F_ϑ, $\vartheta \in A \subseteq \mathbb{R}$.

Avendo a disposizione $x_1, \dots, x_n$ dati, ottenere una stima per ϑ.

Abbiamo ottenuto stimatori puntuali, $g(X_1,\dots,X_n)$ statistiche campionarie.

(La stima è data da $g(x_1,\dots,x_n) = g(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$)

<u>Media campionaria</u> $\overline{X} = \dfrac{X_1+\dots+X_n}{n}$ per $E[X_k]$

stima $\overline{x} = \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$

<u>Varianza campionaria</u> $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$ per $Var(X_k)$

stima $\overline{\sigma}^2 := \sigma^2(x) = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$

$\longleftrightarrow$

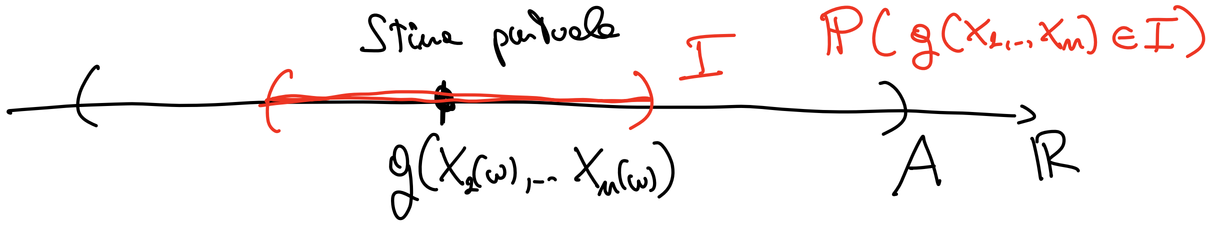
<u>Intervalli di fiducia</u> Stimare $\vartheta \in A \subseteq X$.

<u>Def</u> Dato $\alpha \in (0,1)$, si chiama <u>INTERVALLO DI FIDUCIA PER ϑ AL LIVELLO $(1-\alpha)$</u> un intervallo $I \subseteq A$ t.c. $\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in I) \geq 1-\alpha$.

$$X_k : \underset{(\mathbb{P})}{\Omega} \longrightarrow \underset{(\mathbb{P}_{X_k})}{\mathbb{R}}$$

$\mathbb{P}_\vartheta$ è la prob. $\mathbb{P}_{X_k}(B) = \mathbb{P}(X_k \in B)$

$$g(X_1,\dots,X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

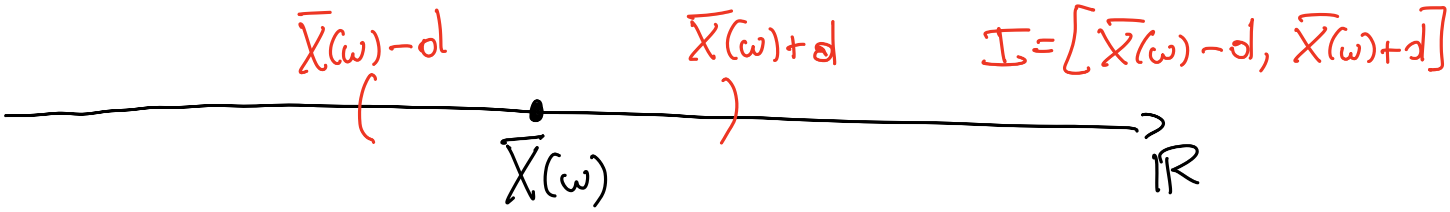


- Intervalli di fiducia per la media di un campione gaussiano con varianza nota

$X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 nota , stimare μ !

Stima per μ è data da $\bar{X} = \dfrac{X_1+\dots+X_n}{n} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

OSS $\bar{X}$ è approssimata da $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ se $\{X_k\}$ indip , equid. con $E[X_k]=\mu$, $Var(X_k)=\sigma^2$.



t.c. $\mathbb{P}_\mu(\mu \in I) = \mathbb{P}_\mu(\mu \in [\bar{X}(\omega)-d, \bar{X}(\omega)+d])$
$= \mathbb{P}_\mu(|\bar{X}(\omega)-\mu| < d) = \mathbb{P}_\mu(\bar{X} \in [\mu-d, \mu+d])$
verifichi $\mathbb{P}_\mu(\mu \in I) \geq 1-\alpha$.

OSS α piccolo $[\alpha = 0.05]$
d piccolo

compromesso

Cerchiamo d in modo che $\mathbb{P}_\mu(\mu \in I) = 1-\alpha$

- Prima di usare i dati

  Cerchiamo d in modo che l'evento $\{|\overline{X}(\omega) - \mu| < d\}$ abbia probabilità $(1-\alpha)$.

  Cerchiamo d in modo che la probabilità che $[\overline{X}(\omega) - d, \overline{X}(\omega) + d]$ contenga μ sia $(1-\alpha)$

- Usando i dati

  Cerchiamo d in modo che μ appartenga a $[\bar{x} - d, \bar{x} + d]$ con una fiducia di livello $(1-\alpha)$