Somme di v.a. $\quad X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$$Z = X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

Prop Siano X, Y v.a. discrete a valori in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ con funzioni di massa p_X e p_Y. Supponiamo che X e Y siano indipendenti. Allora la v.a. $Z = X + Y$ è v.a. discreta con funzione di massa

$$p_Z(n) = \sum_{h=0}^{n} p_X(h)\, p_Y(n-h) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 .$$

(formula di convoluzione discreta)

dim $\quad p_Z(n) = \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, Z(\omega) = n\})$

$$= \mathbb{P}(X + Y = n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{h=0}^{n} \{X = h, Y = n-h\}\Big) =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \mathbb{P}(X = h, Y = n-h) = \sum_{h=0}^{n} p_{X,Y}(h, n-h) =$$

$$\underset{X, Y \text{ indip}}{=} \sum_{h=0}^{n} p_X(h)\, p_Y(n-h) \qquad \square$$

ES $\quad X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$ indipendenti

$$\Rightarrow \quad Z = X + Y \sim B(n+m, p)$$

Devo mostrare è che $\quad p_Z(k) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$

$$\forall\, k = 0, \ldots, n+m$$

$$p_Z(k) = 0 \quad \forall\, k \neq 0, \ldots, n+m .$$

Se $k = 0, \dots, n+m$

$$P_Z(k) = \sum_{j=0}^{k} P_X(j)\, P_Y(k-j) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-k+j}$$

$$= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = p^k (1-p)^{n+m-k} \binom{n+m}{k}$$

COR $\quad X \sim B(n,p)$ è la somma di n v.a. $B(1,p)$ indip.

ES $\quad X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$

$$\Rightarrow Z = X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$$

Devo mostrare che $P_Z(n) = e^{-(\lambda+\mu)} \dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

Prop $\quad$ Siano X e Y v.a. con densità f_X e f_Y, e X e Y siano indipendenti. Allora $Z = X + Y$ è v.a. con densità f_Z data da

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy$$

ES $\quad X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

indipendenti

$$\Rightarrow Z = X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\, e^{-\frac{(z-m_1-m_2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \, dx$$

ES X v.a. discreta con valori $\{0, +1\}$ e

$$P_X(0) = \frac{1}{3}, \quad P_X(+1) = \frac{2}{3}$$

$$Y \sim N(0,4), \quad Y = 2Z \text{ con } Z \sim N(0,1)$$

Se X e Y son indip, stimare $\mathbb{P}(X+Y>1)$.

$$\mathbb{P}(X+Y>1) = \mathbb{P}(X=0,\ 0+Y>1) + \mathbb{P}(X=+1,\ 1+Y>1)$$

$$\mathbb{P}(X+Y>1 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X+Y>1 \mid X=+1)\,\mathbb{P}(X=1)$$

$$= \mathbb{P}(X=0, Y>1) + \mathbb{P}(X=+1, Y>0) =$$

$$= \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y>1) + \mathbb{P}(X=+1)\,\mathbb{P}(Y>0) =$$

$$= \frac{1}{3}\mathbb{P}(2Z>1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(2Z>0) =$$

$$= \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z>\tfrac{1}{2}) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(Z>0) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \Phi(\tfrac{1}{2})\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \Phi(0)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\Phi(\tfrac{1}{2}) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} \sim \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(0.30854)$$

$$\sim 0.436$$

Valore atteso e varianza

Def Per $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, si chiama MOMENTO n-SIMO di una v.a. X a valori reali, il numero $E[X^n]$ dato, se esiste, da:

- se X è discreta con funzione di massa p_X su $\{x_1, x_2, \dots\}$

$$E[X^n] := \sum_{x_i} x_i^n \, p_X(x_i)$$

- se X è con densità f_X

$$E[X^n] := \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) \, dx$$

Prop (i) Se X assume valori in un insieme limitato allora $E[X^n] \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$.

(ii) Sia $E[|X|^n] := \sum_{x_i} |x_i|^n p_X(x_i)$ oppure

$E[|X|^n] := \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f_X(x) \, dx$, se $E[|X|^n] < +\infty$

allora $E[X^n] \in \mathbb{R}$.

(iii) Se $E[|X|^n] < +\infty$ allora $E[|X|^m] < +\infty$ $\forall m = 1, \dots, n-1$.

$\boxed{\text{CASO } n = 1}$

Def Si chiama VALORE ATTESO (o SPERANZA, o EXPECTATION) di una v.a. X a valori reali il numero $E[X]$, se esiste, dato da:

- X è discreta con p_X

$$E[X] := \sum_{x_i} x_i \, p_X(x_i)$$

- X ha densità f_X

$$E[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

<u>OSS</u> $\{x_1, \dots, x_n\}$ con $p_X(x_i) = \frac{1}{n}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{x_i} x_i \, p_X(x_i)$$

<u>ES</u>

- Estratta una carta da 52, puntando 1€ su "fiori" e 1€ su "re di cuori". Si ottenevano 4 € se usciva "fiori", e 52 € se usciva il "re di cuori".

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ "vincita", assume valori in $\{-2, +2, 50\}$

$$p_X(-2) = \mathbb{P}(X=-2) = 1 - \frac{14}{52} = \frac{38}{52}$$

$$p_X(+2) = \mathbb{P}(X=+2) = \frac{13}{52}$$

$$p_X(50) = \mathbb{P}(X=50) = \frac{1}{52}$$

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i \, p_X(x_i) = (-2)\, p_X(-2) + (+2)\, p_X(+2) + (50)\, p_X(50)$$

$$= -2 \cdot \frac{38}{52} + 2 \cdot \frac{13}{52} + 50 \cdot \frac{1}{52} = \frac{-76+26+50}{52} = 0.$$

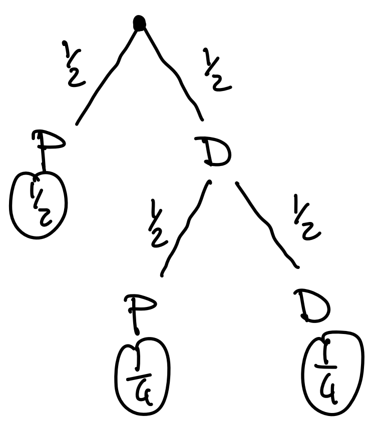
ES Lanciamo 3 dadi a 6 facce equiprobabili.

Ciascun dado su cui si ottiene un numero dispari, viene rilanciato. Se punto 1 € sul fatto che la somma dei tre esiti sia pari, quanto devo ottenere perché il gioco sia onesto?

- Indipendenza tra dadi distinti.
- V.a. X che descrive l'esito di un dado.

X assume valori P e D con probabilità

$$\mathbb{P}(X=P)=\frac{3}{4} \qquad \mathbb{P}(X=D)=\frac{1}{4}$$



Se P è il successo, $X \sim B(1, 3/4)$

- X_1, X_2, X_3 sono le v.a. associate all'esito dei tre dadi, $X_i \sim B(1, 3/4)$ e indipendenti

$\mathbb{P}(\text{somma esiti} = P) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\text{somma esiti} = D) =$

somma è pari $\Longleftrightarrow$ uno solo è pari o tutti sono pari

Se $Y = X_1 + X_2 + X_3 \sim B(3, 3/4)$

somma è pari $\Longleftrightarrow$ $Y = 1$ opp. $Y = 3$

$$\mathbb{P}(\text{somma esiti} = P) = \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=3) =$$

$$= \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 =$$

$$= \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{36}{64}$$

$$\mathbb{P}(\text{somma esiti} = P) = \frac{36}{64} \qquad \mathbb{P}(\text{somma esiti} = D) = \frac{28}{64}$$

- $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ "vincita"

Z assume valori in $\{-1, Q-1\}$

$$P_Z(-1) = \frac{28}{64}, \quad P_Z(Q-1) = \frac{36}{64}$$

$$E[Z] = (-1)\frac{28}{64} + (Q-1)\frac{36}{64} = \frac{36}{64}Q - 1$$

$$E[Z] = 0 \Longleftrightarrow Q = \frac{64}{36}$$

$\square$