# Variabili aleatorie (ancora ...)

**Esempio** Lanciamo ripetutamente un dado e contiamo il numero di lanci necessari ad ottenere il "2".

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X$ assume valori in $\mathbb{N}$ (v.a. discreta)

Determiniamo la funzione di massa di $X$

$$p(h) = \mathbb{P}(X = h) = \left(\frac{5}{6}\right)^{h-1} \cdot \frac{1}{6} \qquad \forall\, h \geq 1,\ h \in \mathbb{N}$$

**Def** $X$ v.a. GEOMETRICA DI PARAMETRO $p \in (0,1)$ se assume valori in $\mathbb{N}$ e

$$p(h) = \mathbb{P}(X = h) = (1-p)^{h-1}\, p \qquad \forall\, h \geq 1$$

**OSS** Supponiamo che il "2" non sia uscito nei primi 5 lanci, qual è la prob. che esca al lancio $h = 8$?

$$\mathbb{P}(X = 8 \mid X > 5) = \frac{\mathbb{P}(\{X = 8\} \cap \{X > 5\})}{\mathbb{P}(X > 5)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = 8)}{\mathbb{P}(X > 5)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^7 \frac{1}{6}}{\sum_{h \geq 6} \left(\frac{5}{6}\right)^{h-1} \frac{1}{6}} =$$

$$\left[\sum_{h=0}^{N} \vartheta^h = \frac{1-\vartheta^{N+1}}{1-\vartheta} \quad \forall \vartheta \in (-1,1),\ N \geq 0\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^7}{\sum_{h=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{h-1} - \sum_{h=1}^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{h-1}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^7}{\frac{1}{1-\frac{5}{6}} - \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^5}{1-\frac{5}{6}}} =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\right)} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X=3)$$

<u>Prop</u> Se $X$ v.a. geometrica di par. $p$, allora

$$\mathbb{P}(X = n+t \mid X > n) = \mathbb{P}(X = t)$$

per ogni $n, t \geq 1$.

(Assenza di memoria)

---

<u>Def</u> $X$ si dice v.a. DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$ se assume valori in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e

$$p(h) = \mathbb{P}(X=h) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^h}{h!} \quad \forall h \geq 0$$

<u>OSS</u> $$\sum_{h\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^h}{h!} = e^{-\lambda}\sum_{h\geq 0}\frac{\lambda^h}{h!} = 1$$

$$\left[e^t = \sum_{h\geq 0}\frac{t^h}{h!} \quad \forall t \in \mathbb{R}\right]$$

<u>OSS</u> $B(n,p)$ con $n$ grande e $p$ piccolo

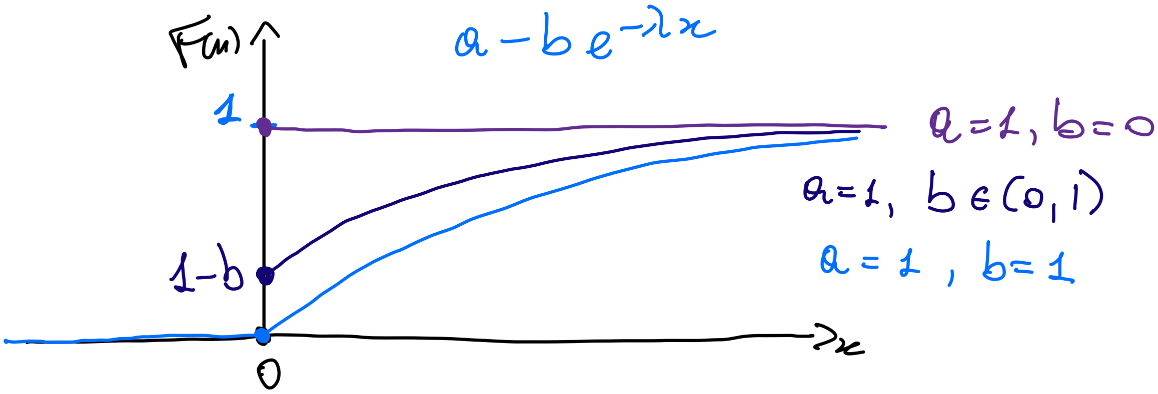
è approssimata da v.a. di Poisson con
$\lambda = n \cdot p$.

---

**ES** Sia

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a - b e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad , \lambda > 0$$

Per quali $a, b \in \mathbb{R}$, $F$ è la funz di ripartiz. di una v.a. $X$? Per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$, la v.a. $X$ è con densità?




- $\forall\ x < y$ si ha $F(x) \leq F(y)$

$x \leq 0$ <u>ok</u>

$x > 0$ , $F'(x) \geq 0 \iff \lambda b \geq 0$

glob. , $\lim_{x \to 0^+} F(x) \geq F(0)$

$\Rightarrow \quad a - b \geq 0$

CASO $b=0$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$ con $a \geq 0$

- $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, ok

  $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$, $\boxed{a=1}$

$X$ v.a. discreta con $p(0) = 1$

$p(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$

CASO $b>0$, $a \geq b$

- $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, ok

  $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} (a - b e^{-\lambda x}) = 1$

  $\iff a = 1$

- $F$ continua da destra, ok

$$\boxed{a=1, \quad b \in (0,1]}$$

(ii) Per quali $a,b \in \mathbb{R}$, $X$ è v.a. con densità?

- $F$ continua

  $x<0$, ok

$x > 0$, <u>ok</u>

$x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$

$\Longleftrightarrow \quad 0 = 1 - b \quad \Longleftrightarrow \quad b = 1$

---

<u>Def</u> Si dice che $X$ è v.a. con densità ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda \geq 0$ se ha densità

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>Prop</u> (Assenza di memoria)

$$\mathbb{P}(X \leq t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

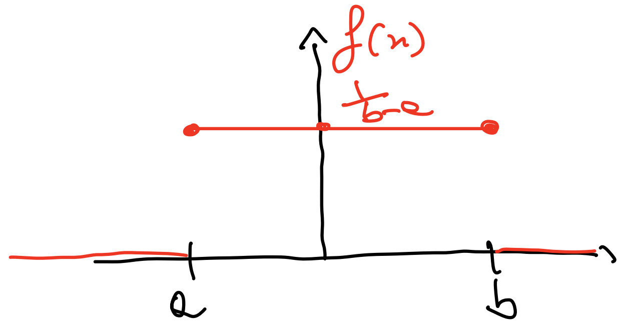
La funz. di ripartizione è

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

---

<u>ES</u> Sia $X$ v.a. con densità uniforme su $[a,b]$. Scrivere la funz. di ripartizione.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{alt.} \end{cases}$$




$\underline{x < a}$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

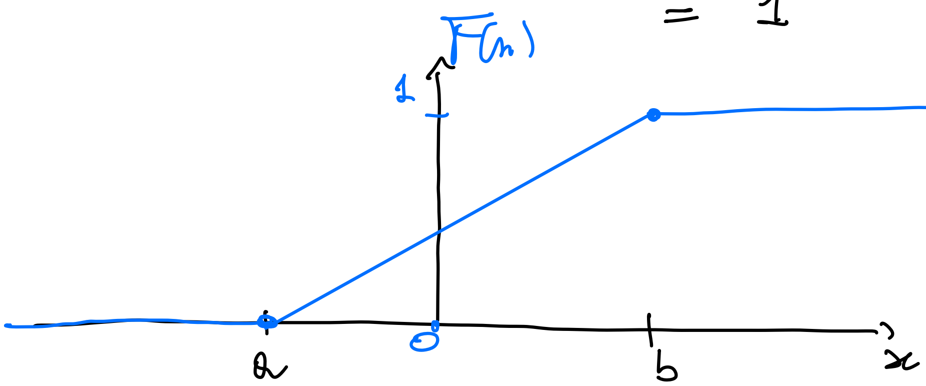
$\underline{a \le x \le b}$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt =$$

$$= F(a) + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

$\underline{x > b}$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt}_{} + \int_{b}^{x} 0\,dt =$$

$$= F(b) + 0 =$$

$$= 1$$




$$F'(x) = f(x)$$

---

**ESERCIZIO** Trovare la funz di rip. per

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

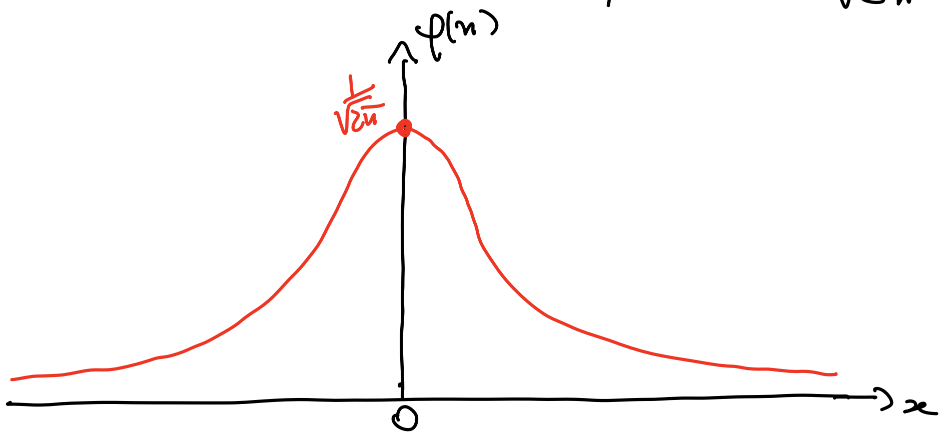
e primo e terzo quartile e mediana.

## Variabile aleatoria gaussiana

**Def** Si chiama v.a. gaussiana standard (o v.a. normale standard) la v.a. con densità

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e




funz. di ripartizione

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

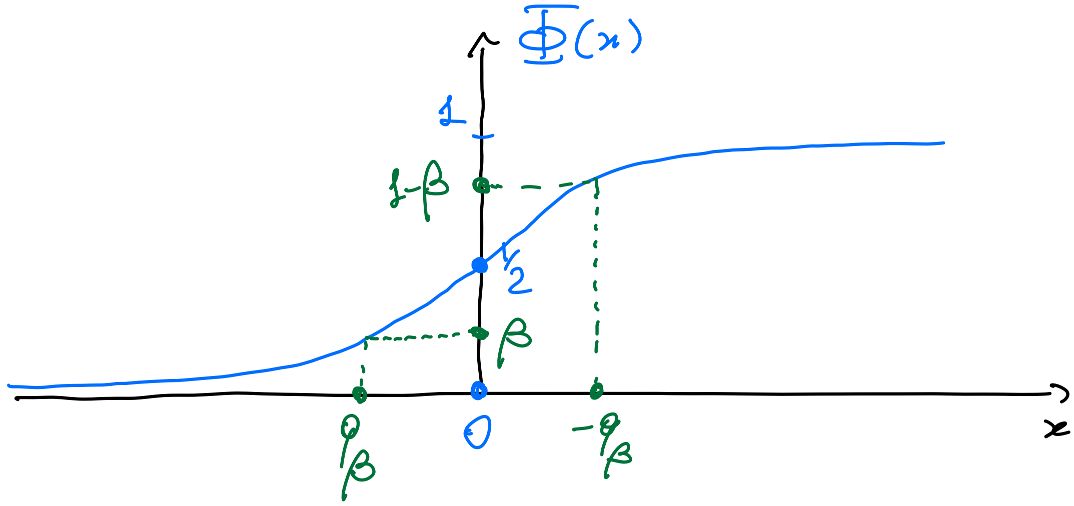
$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \right]$$

Se $X$ è v.a. gaussiana standard si scrive

$$X \sim N(0,1)$$

**Prop**

- $\varphi(x)$ è una funzione pari $(\varphi(-x) = \varphi(x))$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Il $\beta$-quantile si indica con $q_\beta$ e $q_{1-\beta} = -q_\beta$




$$\Phi(q_\beta) = \beta = 1 - \Phi(-q_\beta)$$

$$\Phi(-q_\beta) = 1-\beta = \Phi(q_{1-\beta})$$

$X \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(-2 \le X \le 1) = \mathbb{P}(X \le 1) - \mathbb{P}(X < -2)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2))$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \sim$$

$$\sim 0.84134 + 0.97725 - 1 = 0.81859$$

$$\mathbb{P}(-a \le X \le a) = 2\Phi(a) - 1$$

$a = 1 \qquad \sim 0.68$

$a = 2 \qquad \sim 0.94$

$a = 3 \qquad \sim 0.997$