$$\Omega \text{ universo} \xrightarrow{\quad X \quad} \mathbb{R}$$

$\mathbb{P}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}_X$ legge di probabilità

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) \in [0,1]$$
$$= \mathbb{P}_X((-\infty, x])$$

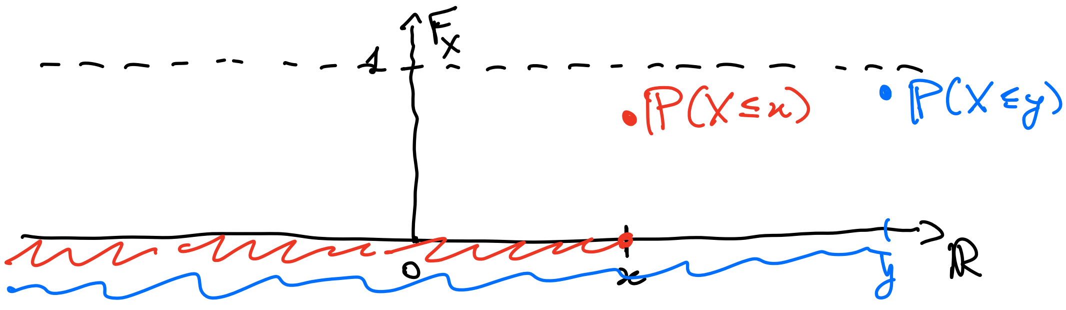
Prop Sia X v.a. a valori reali e F_X la sua funz. di ripartizione, allora:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ si ha $F_X(x) \le F_X(y)$
(debolmente crescente)

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(iii) F_X è continua a destra in ogni $x \in \mathbb{R}$
$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x) \right)$

<u>dim</u>



(i) $x < y$, $\quad F_X(y) - F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, y]) - \mathbb{P}_X((-\infty, x])$

$$= \mathbb{P}_X((x, y]) \ge 0$$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \iff \forall \{x_n\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(x_n) = 0$$

Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, t.c. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ decrescente, e poniamo $A_n := (-\infty, x_n]$, allora $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n$ e $F_X(x_n) = \mathbb{P}_X(A_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_X(A_n) = \mathbb{P}_X\Big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\Big) = 0$$

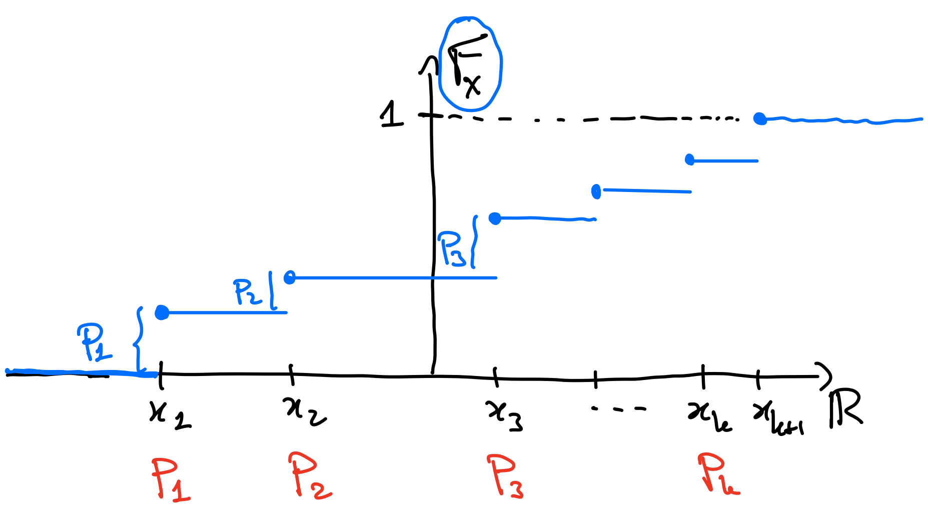
poiché $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$.

(iii) vedi casi particolari $\square$

<u>OSS</u> • Una $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ che soddisfa (i)-(ii)-(iii) della prop. è la funz. di ripartiz. di una v.a.

• Data $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ che soddisfa (i)-(ii)-(iii) della prop., è univocamente determinata la legge di probabilità della v.a.

<u>Caso v.a. discreta</u> X v.a. con legge $\mathbb{P}_X$ e funzione di massa $p_i := \mathbb{P}_X(\{x_i\})$ su $\{x_1, x_2, \dots\}$ finito o numerabile.



$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x_i \in A} \mathbb{P}_X(x_i)$$

$p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$

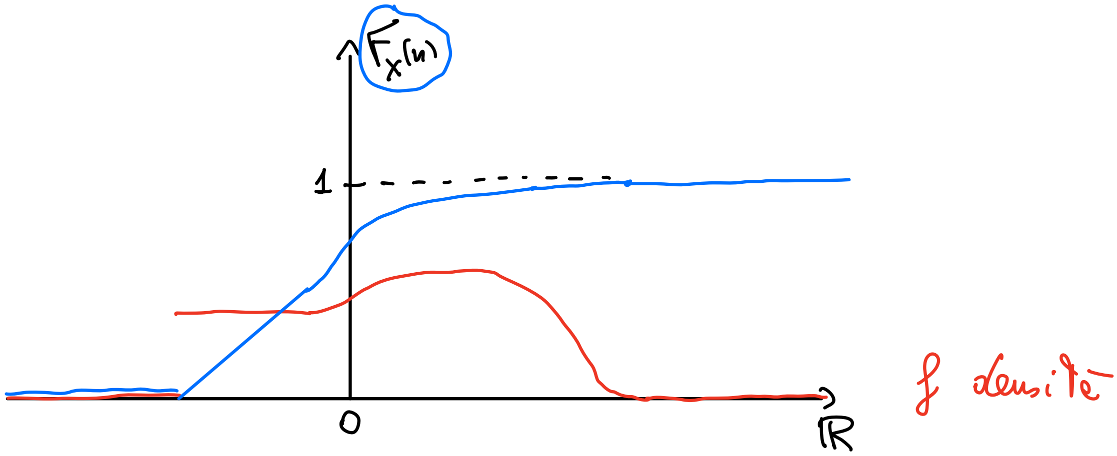
$$\underbrace{\lim_{y\to x_i^-} F_X(y)}_{\mathbb{P}(X<x_i)} = \underbrace{\lim_{y\to x_i^+} F_X(y)}_{F_X(x_i)=\mathbb{P}(X\le x_i)} - \mathbb{P}_X(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_X(x) = F(x) - \lim_{y\to x^-} F(y)$$

<u>Caso v.a. con densità</u> $\quad X$ v.a. con densità $f(x)$

$$\left(f\ge 0,\ f \text{ int},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1\ ;\quad \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\,dx \right).$$

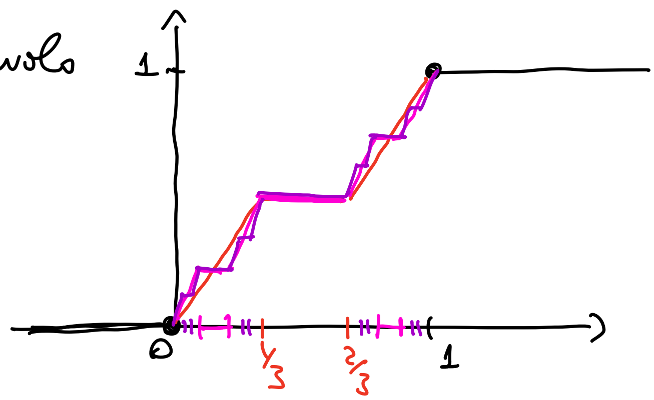
$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



<u>Prop</u> Se X è v.a. con densità allora F_X è continua in ogni $x\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow\!\!\!\!/$

<u>ES</u> $\quad F$ scala del diavolo



La funzione di rip. F_X è derivabile in quasi ogni punto

e $f(x) = F_X'(x)$ (f continua in quasi ogni punto)

$\longleftrightarrow$

<u>Def</u> Dati una v.a. X e $\beta \in (0,1)$ si chiama <u>β-quantile</u> di X un numero $r \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \le r)}_{=F_X(r)} \ge \beta \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X \ge r) \ge 1-\beta$$

$$\mathbb{P}(X \ge r) = \mathbb{P}(X > r) + \mathbb{P}(X = r) = 1 - F_X(r) + \mathbb{P}(X=r)$$

<u>OSS</u> Se X è v.a. con densità allora $\mathbb{P}(X=r) = 0 \;\; \forall r$

$\Rightarrow$ r è un β-quantile se

$$\underbrace{F_X(r) \ge \beta \quad \text{e} \quad 1 - F_X(r) \ge 1-\beta}$$

$$\Downarrow$$

$$F_X(r) = \beta$$

<u>Esempi</u>

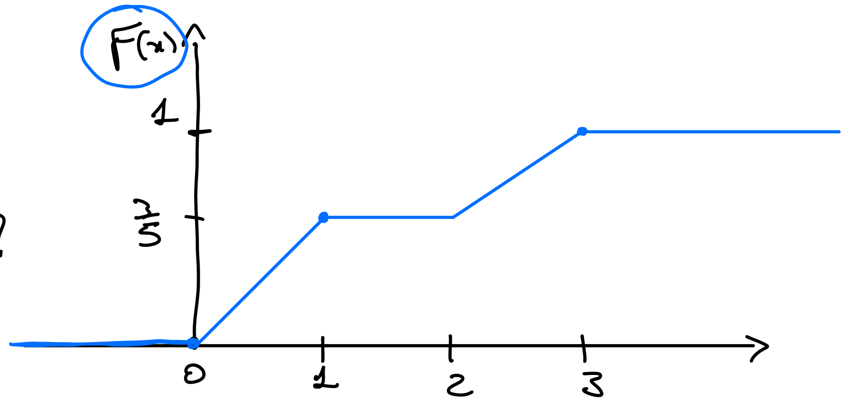
1) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{5}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \le x \le 2 \\ \frac{2}{5}(x-2) + \frac{3}{5}, & 2 < x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

(a) F è funz di rip di v.a.?

(b) Con densità o discreta?

(c) Legge?

(d) β-quantile



(a) (i) deb. crescente ✓
(ii) limiti ✓
(iii) continua da destra ✓

$\Rightarrow$ F è una funz. di rip. di una v.a. X

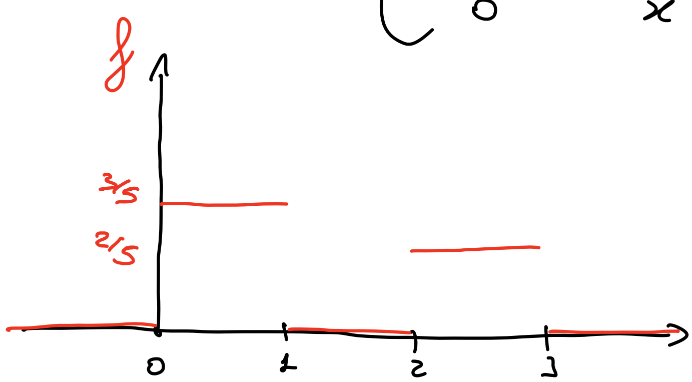
(b) F è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ X è v.a. con densità.

(c) Troviamo $f(x)$. Sappiamo che $f(x) = F'(x)$ (dove esiste)

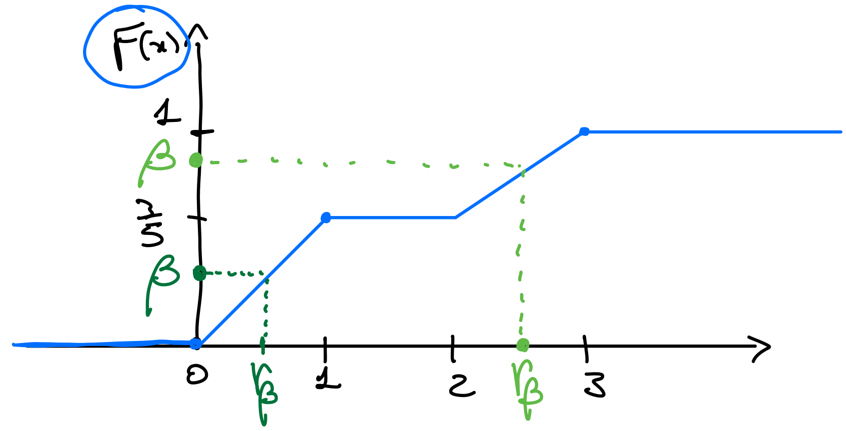
$F'(x)$ esiste $\forall\, x \neq 0, 1, 2, 3$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{3}{5}, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{5}, & 2 < x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

Il valore in $0, 1, 2, 3$ è arbitrario



(d)



Fissato $\beta \in (0,1)$, un numero r è il β-quantile se $F(r)=\beta$.

Se $\beta \in (0, \frac{3}{5} = 0.6)$, r_β è l'unica soluzione di

$$F(r) = \frac{3}{5} r = \beta$$

$$\Rightarrow \quad r_\beta = \frac{5}{3}\beta$$

Se $\beta = 0.6$, poiché F vale 0.6 su $[1,2]$, si pone

$$r_{0.6} = \frac{3}{2}$$

Se $\beta \in (0.6, 1)$, allora $r_\beta \in (2,3)$ ed è l'unica soluzione di

$$F(r) = \frac{2}{5}(r-2) + \frac{3}{5} = \beta$$

$$\Rightarrow \quad r_\beta = \frac{5}{2}\left(\beta - \frac{3}{5}\right) + 2$$

Primo quartile $= r_{0.25} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

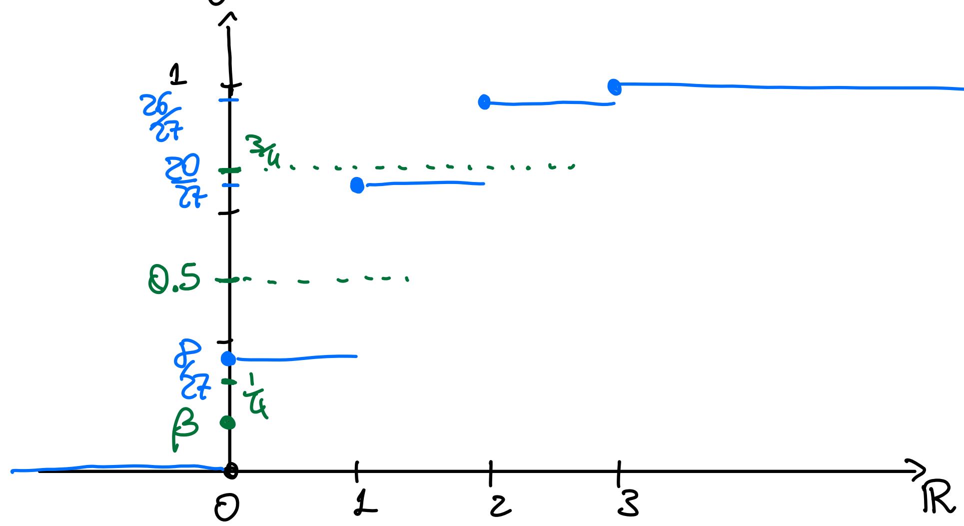
Mediana $= r_{0.5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

Terzo quartile $= r_{0.75} = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) + 2 = \frac{15}{40} + 2 = \frac{95}{40}$

2. $X \sim B(3, \frac{1}{3})$

Funz. di rip? β-quantili?

$$p(h) = \begin{cases} \binom{3}{h} \left(\frac{1}{3}\right)^h \left(\frac{2}{3}\right)^{3-h} & , \quad \text{se } h \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & , \quad \text{alt.} \end{cases}$$



$F(0) = p(0)$

$F(1) = p(0) + p(1)$

$F(2) = p(0) + p(1) + p(2)$

$F(3) = 1$

$p(0) = \frac{8}{27}$, $p(1) = \frac{12}{27}$, $p(2) = \frac{6}{27}$, $p(3) = \frac{1}{27}$

Il β-quantile r_β deve soddisfare $F(r) \geq \beta$, $1 - F(r) + P_X(r) \geq 1 - \beta$

Se $\beta \in (0, \frac{8}{27})$, $r_\beta = 0$

Primo quartile, $r_{0.25} = 0$

Mediana, $r_{0.5} = 1$

Terzo quartile, $r_{0.75} = 2$